Un difficile exercice de convergence uniforme posé dans l'American Mathematical Monthly en 2000

Par Daniel Saada

En avril 2002, l'*American Mathematical Monthly* publiait la solution d'un exercice posé deux ans plus tôt :

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)^n}$ converge uniformément sur l'intervalle [0,1].

L'extraordinaire technicité de la démonstration m'a incité à rechercher une solution plus simple. J'ai d'abord voulu examiner le cas, à priori plus accessible, de la série de terme général polynomial $x^n(1-x)^n$, qui converge aussi uniformément sur [0,1] puisque l'on a

$0 \le x^n(1-x^n)^n \le \frac{x^n}{(1+x^n)^n}$. Cet article étudie donc d'abord la fonction f(x) = $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)^n$; les démonstrations sont complètes hormis quelques lemmes laissés au lecteur.

1) La fonction f est définie et bornée sur [0,1]

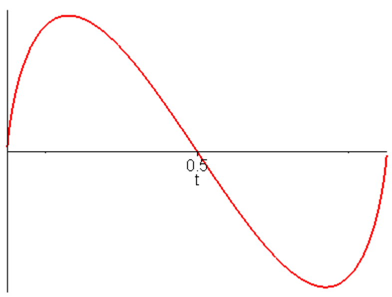
On a évidemment f(0) = f(1) = 0 ; pour x dans]0,1[, l'encadrement $0 \le x^n(1-x)^n \le x^n$ montre que f(x) existe et que la série définissant f converge normalement sur tout [0, a] de [0,1[. Néanmoins, il n'y a **pas** convergence normale sur [0,1] car le maximum de $t(1-t)^n$, qui vaut $\frac{1}{n+1}(\frac{n}{n+1})^n$, est équivalent à $\frac{1}{en}$ quand n tend vers l'infini.

Lemme 1 : Le maximum sur [0,1] de $t(1-t)^n$ et de $(1-t)t^n$ est inférieur à 1/(n+1).

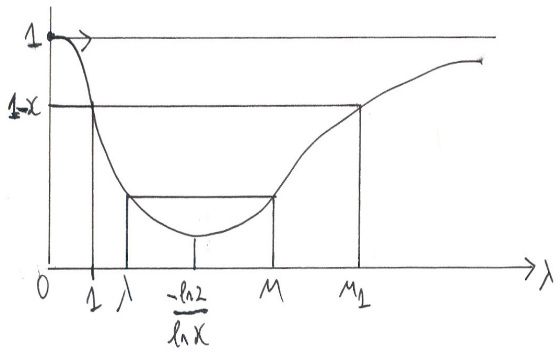
Commençons par étudier les variations de la suite $(1-x^n)^n$ quand le paramètre x est dans]0,1[.

En posant $u(\lambda) = (1-x^\lambda)^\lambda$, $\lambda > 0$, la dérivée $\frac{du}{d\lambda}$ est du signe de $(1-x^\lambda)\ln(1-x^\lambda) - x^\lambda\ln(x^\lambda)$.

Or le graphe de $(1-t)\ln(1-t) - t\ln(t)$ est :



Ainsi, la fonction u croît si $x^\lambda \le ½$, décroît si $x^\lambda \ge ½$; les limites de $u(\lambda)$ valant 1 quand λ tend vers 0^+ ou $+\infty$, il en résulte l'allure des graphes de u sur R^+ quand $\frac{-\ln 2}{\ln x} > 1$ c'est-à-dire x > ½ :



Lemme 2 : A tout λ dans $]0, \frac{-\ln 2}{\ln x}[$ correspond un seul μ tel que $(1-x^{\lambda})^{\lambda} = (1-x^{\mu})^{\mu}$ et la formule liant λ et μ est $x^{\lambda} + x^{\mu} = 1$.

Quand x reste sur]0, ½], la suite $(1 - x^n)^n$ est croissante et en particulier $(1-x^n)^n \geq 1-x$, mais cette inégalité, intéressante en elle-même, ne sera pas exploitée par la suite.

Pour x fixé dans]1/2,1[, soit n_1 la partie entière de μ_1 associé à λ =1:

$$x^{\mu_1} = 1-x \text{ et } x^{1+n_1} \leq 1-x.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_1} x^k (1-x^k)^k \leq \sum_{k=1}^{n_1} x^k(1-x) = x - x^{1+n_1} \leq x$

et $\displaystyle\sum_{1+n_1}^{\infty} x^k (1-x^k)^k \leq \sum_{1+n_1}^{\infty} x^k = \frac{x^{1+n_1}}{1-x} \leq 1$, f est majorée par 2 sur]1/2, 1[.

Sur [0,1/2], f(x) ≤ $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \leq 1$; **f, qui est positive, est donc majorée par 2 sur [0,1]**.

2) La fonction f n'est pas C^1 sur [0,1] car non dérivable en 1

Soit n_2 la partie entière de μ_2 associé à λ =1/2 : $x^{\mu_2} = 1-\sqrt{x}$ et $x^{n_2} \geq 1-\sqrt{x}$.

On a : $f(x) \geq \displaystyle\sum_{1+n_2}^{\infty} x^k (1-x^k)^k \geq (1-x^{\mu_2})^{\mu_2} \sum_{1+n_2}^{\infty} x^k = \sqrt{1-\sqrt{x}}\,\frac{x^{1+n_2}}{1-x} \geq \frac{x\sqrt{1-\sqrt{x}}}{1-x}(1-\sqrt{x})$,

et $\displaystyle\frac{f(x)}{1-x} \geq \frac{x}{1+\sqrt{x}}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{1-x}$. **La dérivée de f en 1 est donc infinie .**

3) La fonction f est est C^0 sur [0,1]

Il suffit (et nécessaire ici, voir **6a**) de prouver que la convergence est uniforme sur [0,1] . Compte tenu de la convergence uniforme sur tout [0, a], il s'agit de trouver, pour ε > 0, un entier N_1 et un réel a de]0,1[, tels que $\displaystyle\sum_{N_1}^{\infty} x^n (1-x^n)^n \leq 3\varepsilon$ sur l'intervalle]a,1[. Pour ce faire, le $\sum$ sera divisé en trois tronçons : de N_1 à N_2, de $1+N_2$ à N_3 , de N_3 à l'infini. Mais, et c'est là que réside la difficulté, N_2 et N_3 dépendront de x.
Dans toute la suite, x désigne un réel fixé entre a et 1.

Choix de a : a = $e^{-\varepsilon/8}$; ce choix entraîne le

Lemme 3 : a$\geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $a^4 \geq 2^{-\varepsilon}$ et $(1-a)^{\varepsilon} \leq \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Choix de N_1 : N_1 est la partie entière de $-\dfrac{\ln 2}{\ln a}$.

Étape 1 : comme a$\geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et x > a, on aura $2 \leq N_1 \leq \dfrac{-\ln 2}{\ln a} \leq \dfrac{-\ln 2}{\ln x}$; appelons encore μ_2 le réel associé à λ = 2 ($x^{\mu_2} = 1 - x^2$) et N_2 la partie entière de μ_2 .

N'oublions pas que, de 2 à N_2, u(k) est majorée par u(2).

Alors, en vertu aussi des *lemmes 1* et *3* :

$$\sum_{N_1}^{N_2} x^k(1-x^k)^k \leq (1-x^2)^2 \sum_{N_1}^{N_2} x^k \leq (1-x^2)^2 \frac{x^{N_1}}{1-x} \leq 4(1-x)x^{N_1} \leq \frac{4}{1+N_1} \leq \frac{4}{\frac{-\ln 2}{\ln a}} \leq \varepsilon ,$$

Étape 2 : soit μ_3 le réel associé à λ = $(1-a)^{\varepsilon}$ et N_3 sa partie entière :

$x^{\mu_3} = 1 - x^{\lambda}$ et $x^{1+N_3} \leq 1 - x^{\lambda}$ (comme λ < 1, N_3 dépasse bien N_2).

Lemme 4 : $\lambda \leq \dfrac{1-x^{\lambda}}{1-x} \leq \lambda x^{\lambda-1}$ si x est dans]0,1[et λ < 1.

En utilisant le *lemme 1,* et les inégalités $x^{N_2} \geq 1 - x^2$ et $\ln t \leq 1 - t$, on obtient d'abord :

$$\sum_{1+N_2}^{N_3} x^k(1-x^k)^k \leq \sum_{1+N_2}^{N_3} \frac{1}{1+k} \leq \ln(\frac{N_3}{1+N_2}) \leq \ln(\frac{1+N_3}{N_2}) \leq \frac{1+N_3}{N_2} - 1 \leq \frac{\ln(1-x^{\lambda})}{\ln(1-x^2)} - 1 .$$

Avec $1 - x \leq 1 - x^2$: $\dfrac{\ln(1-x^{\lambda})}{\ln(1-x^2)} - 1 \leq \dfrac{\ln(\frac{1-x^{\lambda}}{1-x})}{\ln(1-x)} \leq \dfrac{\ln \lambda}{\ln(1-x)} = \varepsilon \dfrac{\ln(1-a)}{\ln(1-x)} \leq \varepsilon$, car x ≥ a.

Étape 3 : $\displaystyle\sum_{1+N_3}^{\infty} x^k(1-x^k)^k \leq \sum_{1+N_3}^{\infty} x^k = \frac{x^{1+N_3}}{1-x} \leq \frac{1-x^{\lambda}}{1-x} \leq \lambda x^{\lambda-1} \leq \lambda a^{\lambda-1} \leq \frac{\lambda}{a} \leq \sqrt{2}(1-a)^{\varepsilon} \leq \varepsilon$ **.**

On a bien $\displaystyle\sum_{N_1}^{\infty} x^n(1-x^n)^n \leq 3\varepsilon$, la démonstration est achevée.

5) La série $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)^n}$ <u>converge uniformément sur [0,1]</u>

En effet, la série $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}[\frac{x^n}{(1+x^n)^n} - x^n(1-x^n)^n]$ converge **normalement** car le maximum sur [0,1] de $\dfrac{t}{(1+t)^n} - t(1-t)^n$ est majoré par $(\dfrac{\ln n}{n})^2$.

Démonstration : la fonction $y_n(t) = \dfrac{t}{(1+t)^n} - t(1-t)^n$ est positive et continue sur [0,1] ,

$y_n(0) = 0$ et $y_n(t) = 1/2^n$.

a) A partir d'un certain rang, y_n atteint son maximum sur l'intervalle ouvert]0,1[.

Pour établir ce premier point, on détermine un équivalent de $y_n(\frac{1}{n})$; le calcul donne $y_n(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{en^2}$. Comme $\frac{1}{en^2}$ dépasse asymptotiquement $\frac{1}{2^n} = y_n(1)$, c'est démontré, et il existe donc un t_n de]0,1[en lequel la dérivée y'_n vaut 0.

b) t_n dépasse 1/(n -1).

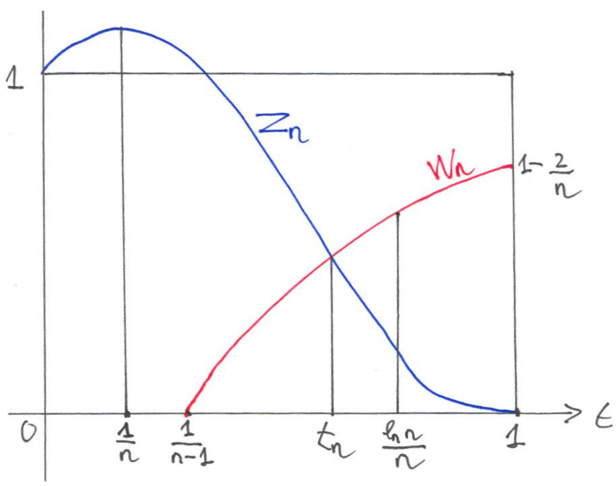
La dérivée logarithmique de y_n , quand on l'écrit $\frac{t}{(1+t)^n}[1-(1-t^2)^n]$ est :

$\frac{1}{t} - \frac{n}{1+t} + \frac{2nt(1-t^2)^{n-1}}{1-(1-t^2)^n}$; pour que y'_n s'annule, il est donc nécessaire que $\frac{1}{t} - \frac{n}{n+t}$ soit négatif , d'où $t > 1/(n-1)$.

c) La dérivée y'_n s'annule en un seul point.

D'abord sur [0, 1/(n -1)] , y'_n est positive ou nulle.
Comme y'_n est, après calculs, du signe de $(1-t)^{n-1}(1+t)^{n+1}[(n+1)t-1]-[(n-1)t-1]$,
et que l'on suppose $t > 1/(n-1)$, y'_n est du signe de $(1-t)^{n-1}(1+t)^{n+1} - \frac{(n-1)t-1}{(n+1)t-1}$.

Posons alors $Z_n(t) = (1-t)^{n-1}(1+t)^{n+1}$ et $W_n(t) = \frac{(n-1)t-1}{(n+1)t-1}$; Z_n et W_n sont monotones sur [1/(n -1),1] , Z_n étant décroissante et W_n croissante. Un dessin résume tout cela :



Le réel t_n obtenu n en **a)** est donc unique et $y_n(t_n)$ est le maximum de y_n.

d) t_n est, asymptotiquement, inférieur à $\ell n(n)/n$.

Nous allons établir que $Z_n(\ell n(n)/n)$ est inférieur à $W_n(\ell n(n)/n)$, à partir d'un certain rang :

- $\ln W_n(\frac{\ln n}{n}) = \ln(\frac{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{\ln n}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{\ln n}}) \sim \frac{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{\ln n}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{\ln n}} - 1 \sim \frac{-2}{n}$;

▪ en posant $\theta_n = \frac{\ln n}{n}$, ln $Z_n(\theta_n) = n\ln(1-\theta_n^2) + \ln(\frac{1+\theta_n}{1-\theta_n})$; comme $n\ln(1-\theta_n^2)$ est équivalent

à $-\frac{(\ln n)^2}{n}$ et que $\ln(\frac{1+\theta_n}{1-\theta_n})$ équivaut à $\frac{2\ln n}{n}$, ln $Z_n(\theta_n) \sim \frac{-(\ln n)^2}{n}$.

Comme $\frac{-2}{n}$ est négligeable devant $\frac{-(\ln n)^2}{n}$, on a prouvé $t_n < \ell n(n)/n$ à partir d'un n_0.

e) y_n est majorée par $(\frac{\ln(n)}{n})^2$ sur [0,1].

On utilise : $\frac{t}{(1+t)^n} \leq \frac{1}{n}$ et $1-(1-t^2)^n \leq nt^2$, d'où $y_n(t_n) \leq (t_n)^2 \leq (\frac{\ln(n)}{n})^2$ **. CQFD.**

6) <u>Compléments et Questions sur la fonction f</u>

a) Il est connu que si le terme général d'une série de fonctions est à la fois positif et continu sur un [a,b], la convergence uniforme **équivaut** à la continuité de la fonction somme .

Aurait-il été plus aisé d'établir que $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)^n$ tend vers 0 quand x tend vers 1 ?

b) En développant $(1 - x^n)^n$ par la formule du binôme, on aboutit à f(x) = $\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{(1-x^n)^n}$:

cette écriture montre clairement la difficulté du calcul de f en 1.

c) La série complexe f(z) = $\sum_1^{\infty} z^n(1-z^n)^n$ converge pour |z| < 1 : a-t-on aussi limite de f(z) = 0

quand z tend vers 1 (c'est faux pour $\sum_1^{\infty}\left|z^n(1-z^n)^n\right|$) ?

d) La fonction f est la somme d'une série entière à coefficients **entiers** $\sum_1^{\infty} c_n x^n$ avec

$c_n = \sum_p (-1)^{\frac{n}{p}-1} C_p^{\frac{n}{p}-1}$, la somme se faisant sur les diviseurs p de n tels que p ≥ $\sqrt{n}$.

En particulier, c_n vaut 1 si n est premier.
Un théorème **sur les séries entières** permet-il de prédire le comportement de f en 1 ?

e) Existe-t-il une condition au moins suffisante pour qu'une suite de polynômes réels convergent uniformément sur un intervalle borné, ou bien est-on condamné à rechercher à chaque fois une démonstration spécifique ?

Daniel Saada, le 13 octobre 2003.