Q372. **D'après l'énoncé d'écrit 6839 (Agrégation interne 1999, épreuve 2 ; énoncé dans la RMS 1/99-00 et corrigé dans la RMS 2/99-00)**

On note K_n l'ensemble des $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ de $\mathbb{C}^n$ tels que $z_1 = 1$ et $|z_i| \leqslant 1$ pour $i = 2, 3, \dots, n$. On pose $s_k(Z) = z_1^k + z_2^k + \cdots + z_n^k$ pour $k = 1, 2, \dots, n$, puis $R_n = \inf\limits_{Z \in K_n} \left(\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |s_k(Z)| \right)$. Voici les résultats obtenus dans l'énoncé :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant R_2 \leqslant \sqrt{3 - \sqrt{5}}\,; \qquad \forall n, \quad R_n > \frac{2}{11}.$$

a. Montrer que $R_2 = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$.

b. Calculer R_3.

c. Que dire de plus sur les R_n ?

A. Tissier

Réponses

R319. **(Prolonge le théorème fondamental de la géométrie affine.)**

Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une injection.

1. On suppose que l'image par f de tout convexe est convexe. Montrer que f est affine.

2. On suppose que f conserve l'alignement des points et que l'image de f n'est pas incluse dans une droite. L'application f est-elle affine ?

D. Saada et A. Linick

Réponse des auteurs

1. **0.** Nous rappelons les deux versions usuelles du théorème fondamental (*cf.* [1]).

a. Si l'image par f d'une droite quelconque de $\mathbb{R}^n$ est une droite, f est affine ;

b. si f est de plus surjective, il suffit que l'image d'une droite soit contenue dans une droite, ou que f conserve l'alignement de 3 points.

1. L'injectivité de f est incontournable.

En effet, $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1^2, 0, \dots, 0)$ n'est pas affine, ni injective, et transforme cependant tout convexe en un convexe.

Dans toute la suite, nous nous limitons, pour la clarté, à n = 2.

2. L'application f conserve l'alignement, et l'ordre.

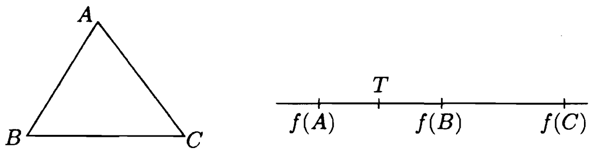
Autrement dit : $\forall(A,B), f([A,B]) = [f(A),f(B)]$.

a. Si $M \in [f(A),f(B)]$, M a son (unique) antécédent dans $[A,B]$, car $[f(A),f(B)]$ est contenu dans le convexe $f([A,B])$.

Remarque. Cette propriété est équivalente à la conservation de la convexité.

b. f transforme 3 points non alignés en 3 points non alignés.

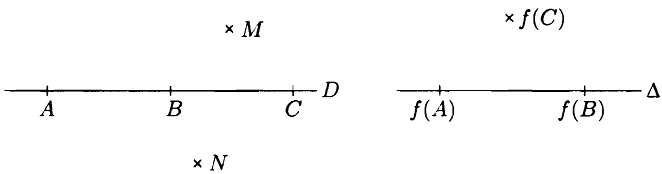
Par l'absurde :



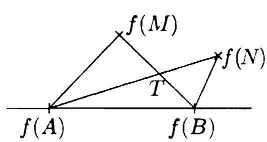
Le point T aurait 2 antécédents : l'un sur $]A,B[$ et l'autre sur $]A,C[$.

c. f conserve l'alignement.

- Soit T un triangle ABC et son intérieur : comme $f(T)$ est convexe, tout point M situé dans le triangle $f(A)f(B)f(C)$ a son antécédent dans T.
- Soit maintenant A,B,C alignés avec $f(A),f(B),f(C)$ non alignés.

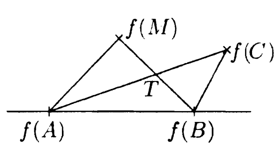


Les points $f(M)$ et $f(N)$, qui ne sont pas sur Δ, ne peuvent appartenir au même demi-plan de frontière Δ, sinon le point T aurait un antécédent dans $[A,N]$ et un antécédent dans $[B,M]$.



Donc il existe M dont l'image est dans le demi-plan où est $f(C)$.

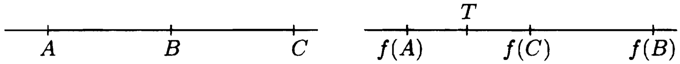
Le même dessin prouve que $f(C)$ doit être sur Δ :



T aurait deux antécédents : l'un sur $[A,C]$, l'autre sur $[M,B]$, ce qui imposerait $T = f(B)$ et donc $f(A),f(B),f(C)$ alignés.

d. f conserve l'ordre d'alignement.

C'est une conséquent du point **a.** Par l'absurde :



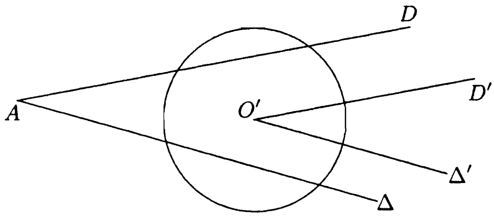
T aurait encore deux antécédents : l'un sur $[A,C]$, l'autre sur $[A,B]$.

3. L'application f est affine.

Le caractère affine de f résultera de notre lemme, sans doute nouveau.

> **Lemme**
> *Soit* f *une injection de* $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *qui conserve l'alignement ; si* $\mathrm{f}(\mathbb{R}^2)$ *contient une boule ouverte,* f *est affine.*

Il suffit (voir **1.0**) de prouver que f est surjective. Nous supposons donc qu'il existe $A \notin f(\mathbb{R}^2)$, lequel contient une boule fermée de centre O' et de rayon non nul :



a. $f^{-1}(D)$ et $f^{-1}(\Delta)$ sont des droites parallèles.

Ce sont d'abord des droites entières, car Δ et d contiennent chacune deux points images ; elles sont parallèles car A n'a pas d'antécédent (nous sommes, rappelons-le, dans $\mathbb{R}^2$).

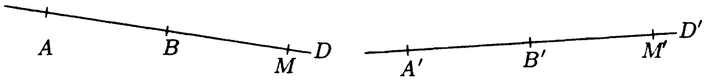
b. Menons par O' les parallèles D' et Δ' à D et Δ. $f^{-1}(D')$ est une droite parallèle à $f^{-1}(D)$ (vérification facile) et $f^{-1}(\Delta')$ est parallèle à $f^{-1}(\Delta)$. Donc $f^{-1}(D')$ et $f^{-1}(\Delta')$ sont parallèles, ce qui est absurde car elles contiennent chacun $f^{-1}(O')$.

c. Il suffit maintenant de vérifier que $f(\mathbb{R}^2)$ n'est pas d'intérieur vide. Reportons-nous au début de **1.3.b** : tout point M situé à l'intérieur d'un triangle image $A'B'C'$ a son antécédent à l'intérieur de ABC.

La question°1 est donc entière résolue **dans le cas $n = 2$.**

d. *Remarque.* Comme $\mathbb{R}^2$ est équipotent à $\mathbb{R}$, il existe des injections $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ d'image $\mathbb{R} \times \{0\}$, d'intérieur vide ; une telle application concerve évidemment l'alignement.

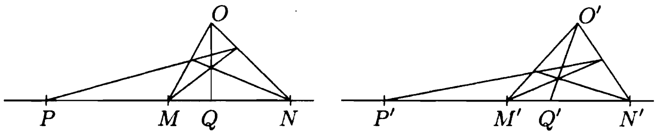
2. 0. Introduciton d'une fonction numérique φ.



Dans le repère (A,B) de D : $x = \overline{AM}$; dans le repère (A',B') de D' : $x' = \overline{A'M'}$. Posons $x' = \varphi(x)$: φ est une injection de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, car f est injective ; croissante puisque f conserve l'ordre d'alignement encore, et $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.

1. φ conserve les divisions harmoniques sur $\mathbb{R}$.

Comme $f(\mathbb{R}^n) \not\subset D'$, soit O tel que $O' \notin D'$.



Le dessin (Ménélaüs-Céva) montre que, si P et Q sont conjugués par rapport à (M,N), P' et Q' sont conjugués par rapport à (M',N'). En particulier, si $M = A$ et en appelant x,y,z les abscisses de P,Q,N, on obtient l'équation fonctionnelle : $\dfrac{1}{\varphi(x)} + \dfrac{1}{\varphi(y)} = \dfrac{2}{\varphi(z)}$ dès que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{z}$ $(x,y,z \neq 0)$.

2. Détermination de ψ sur $]0,\infty[$.

- Soit $\psi(x) = \dfrac{1}{\varphi(1/x)}$: $x + y = 2z \Longrightarrow \psi(x) + \psi(y) = 2\psi(z)$ $(x,y,z \neq 0)$.

- ψ, qui croît comme φ, a en tout $x_0 > 0$ une limite à gauche ℓ^- et une limite à droite ℓ^+. Comme $\psi(x) + \psi(x_0) = 2\psi\left(\dfrac{x + x_0}{2}\right)$:

– si $x \longrightarrow x_0^-$, $\ell^- + \psi(x_0) = 2\psi(x_0)$;

– si $x \longrightarrow x_0^+$, $\ell^+ + \psi(x_0) = 2\psi(x_0)$.

Il en résulte que ψ est continue.

- Il est connu qu'une fonction t continue vérifiant $t\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}(t(x) + t(y))$ est convexe. Aussi ψ est convexe, et concave : ψ est affine sur $]0, +\infty[$.

Nous poserons donc $\psi(x) = ax + b$, sur $]0, +\infty[$.

3. La fonction φ est l'identité sur $\mathbb{R}$.

- Un raisonnement similaire montrerait que $\psi(x) = cx + d$ sur $]-\infty,0[$.

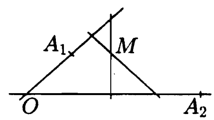
- Soit $x > 0$; comme $\psi(3x) + \psi(-x) = 2\psi(x)$, on obtient facilement $a = c$ et $b = d$. Ainsi $\psi(x) = ax + b$ sur $\mathbb{R}^*$; mais ψ ne s'annule qu'en $x = 0$ et $\psi(1) = 1$; d'où $\psi(x) = x$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\varphi(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

4. L'application f est une bijection affine de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

a. Soit $(0, A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathbb{R}^n$; un raisonnement par récurrence montre facilement que $(f(0), f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_n))$ est aussi un repère affine de $\mathbb{R}^n$.

b. Soit g la bijection affine de $\mathbb{R}^n$ définie par : $g(f(0)) = 0$ et $g(f(A_i)) = A_i$; $g \circ f$ est injective, conserve l'alignement, fixe 0 et les A_i. De plus, en vertu de ce qui précède, $g \circ f$ est l'identité sur chaque droite OA_i.

c. Prouvons que $g \circ f$ est l'identité sur $\mathbb{R}^n$, ce qui achèvera la démonstration. Commençons par M dans le plan OA_1A_2 : la figure montre que $g \circ f(M) = M$.



On poursuit ainsi aisément de proche en proche. Donc f, qui vaut g^{-1}, est affine.

5. Deux contre-exemples.

a. Soit D une droite de $\mathbb{R}^n$ et $M_0 \notin D$; f définie par $f(M) = M$ si $M \in D$ et $f(M) = M_0$ si $M \notin D$ respecte l'alignement, n'a pas son image alignée et n'est ni injective, ni affine.

b. Nécessité de $f(\mathbb{R}^n)$ non inclus dans une droite.

Soit D une droite de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$: D et $\mathbb{R}^n$ étant équipotents, il existe une bijection f de $\mathbb{R}^n \longrightarrow D$. Un argument classique de connexité montre que f ne peut être continue sur $\mathbb{R}^n$ tout entier : f n'est donc pas affine.

Référence.

[1] Jean FRENKEL : *Géométrie pour l'élève professeur*, Hermann 1973.