Le Dernier Secret du Théorème de Pappus?

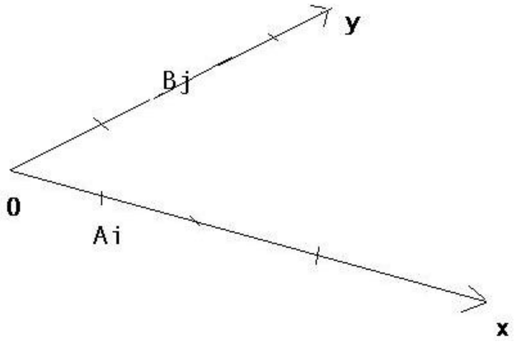

Figure1

Les points A_1, A_2, A_3 sont alignés sur la droite Ox ; B_1, B_2, B_3 sont sur Oy.
Soit $M_{i,j}$ le point d'intersection (supposé exister) des droites AiBj et AjBi .
Le théorème de **Pappus** * affirme que les trois points $M_{1,2}$, $M_{1,3}$, $M_{2,3}$ sont **alignés**.
On connaît plusieurs démonstrations géométriques de ce Théorème : la plus subtile sans doute est celle qui se place dans l'espace en utilisant une application aujourd'hui délaissée, **l'application point de vue** *(Annexe 1)* : *sic transit gloria mundi.*
Le but de cet article est de démontrer le théorème de **Pappus** et sa généralisation le théorème **de Pascal** * , puis d'exposer l' **étonnant résultat** fournis par **Maple** *.

I- Pappus et Maple

Dans le repère cartésien de la figure, aux unités non fixées, soit a_i ou a(i) l'abscisse de A_i et b_j ou b(j) l'ordonnée de B_j ; $M_{i,j}$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_{i,j} = \dfrac{a_i a_j (b_j - b_i)}{b_j a_j - a_i b_i} \\ y_{i,j} = \dfrac{b_i b_j (a_j - a_i)}{b_j a_j - a_i b_i} \end{cases}.$$

Il suffit donc de vérifier que : $(x_{1,2} - x_{2,3})(y_{1,2} - y_{1,3}) = (y_{1,2} - y_{2,3})(x_{1,2} - x_{1,3})$.
Mais il faut se rendre à l'évidence : il n'est pas du tout facile de faire ce calcul à la main !
Ayons donc recours à **Maple** (ou tout autre logiciel de calcul formel) :

```
> u:=(x(1,2)-x(2,3))*(y(1,2)-y(1,3));
```

$$u := \left(\frac{a(1)\,a(2)\,(b(2)-b(1))}{b(2)\,a(2)-b(1)\,a(1)} - \frac{a(2)\,a(3)\,(b(3)-b(2))}{b(3)\,a(3)-b(2)\,a(2)} \right) \left(\frac{b(1)\,b(2)\,(a(2)-a(1))}{b(2)\,a(2)-b(1)\,a(1)} - \frac{b(1)\,b(3)\,(a(3)-a(1))}{b(3)\,a(3)-b(1)\,a(1)} \right)$$

```
> v:=(y(1,2)-y(2,3))*(x(1,2)-x(1,3));
```

$$v := \left(\frac{b(1)\,b(2)\,(a(2)-a(1))}{b(2)\,a(2)-b(1)\,a(1)} - \frac{b(2)\,b(3)\,(a(3)-a(2))}{b(3)\,a(3)-b(2)\,a(2)} \right) \left(\frac{a(1)\,a(2)\,(b(2)-b(1))}{b(2)\,a(2)-b(1)\,a(1)} - \frac{a(1)\,a(3)\,(b(3)-b(1))}{b(3)\,a(3)-b(1)\,a(1)} \right)$$

```
> simplify(u-v);
```

$$0$$

*Pappus, mathématicien grec, vers 300 après J.-C.
*Maple, logiciel de calcul formel créé au 20° siècle par Waterloo Maple Inc. (Canada)
*Pascal (Blaise), mathématicien et philosophe français, 1623 - 1662

Pour ceux que l'opacité de ce calcul dérange, demandons au logiciel les numérateurs de u et v puisque leur dénominateur est visiblement commun :
u et v ont effectivement mêmes numérateurs qui sont produits de [a(1)b(1)a(2)b(2)]
par

[a(1)b(3)a(3) - a(1)b(2)a(2) + a(1)b(1)a(2) - a(3)b(3)a(2) + a(3)b(2)a(2) - a(3)b(1)a(1)]

et

[b(1)b(2)a(2) + b(2)b(3)a(3) - b(2)b(1)a(1) - b(1)b(3)a(3) - b(3)b(2)a(2) + b(3)b(1)a(1)] .

soit **36 termes** (de longueur 10) !
On comprend mieux ainsi la difficulté du calcul **manuel**, et l'égalité u = v mériterait d'être appelée *l'identité de Pappus*.

Nous nous proposons maintenant d'expliquer cette identité de deux manières différentes, inédites à notre connaissance.

II- Une démonstration vectorielle dans l'espace de l'alignement de Pappus

Transformons le déterminant d'ordre 2 qui traduit l'alignement en un déterminant d'ordre 3 :

$$\begin{vmatrix} x_{1,2}-x_{2,3} & x_{1,2}-x_{1,3} \\ y_{1,2}-y_{2,3} & y_{1,2}-y_{1,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{2,3} & x_{1,3} & x_{1,2} \\ y_{2,3} & y_{1,3} & y_{1,2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{2,3} & y_{2,3} & 1 \\ x_{1,3} & y_{1,3} & 1 \\ x_{1,2} & y_{1,2} & 1 \end{vmatrix}.$$

On le vérifierait par un banal calcul, mais il existe une explication géométrique très simple de la première égalité : si des points sont alignés dans le plan de base, il en est de même si on les « soulève » tous d'une cote z commune (ici z =1).
On remarquera aussi que le déterminant d'ordre 3 accorde une place égale aux 3 points.
Ceci dit, en remplaçant $x_{\mathbf{i,j}}$ et $y_{\mathbf{i,j}}$ par leurs valeurs puis en chassant les dénominateurs de chaque ligne, on obtient le déterminant D :

$$D = \begin{vmatrix} a_2a_3(b_3-b_2) & b_2b_3(a_3-a_2) & b_3a_3-b_2a_2 \\ a_1a_3(b_1-b_3) & b_1b_3(a_1-a_3) & b_1a_1-b_3a_3 \\ a_1a_2(b_2-b_1) & b_1b_2(a_2-a_1) & b_2a_2-b_1a_1 \end{vmatrix}$$

dont on veut prouver la nullité. Or :

la 1$^{\text{ère}}$ colonne de D est le produit vectoriel : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \\ a_3b_3 \end{pmatrix}$,

la 2$^{\text{ème}}$ colonne de D est le produit vectoriel : $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \\ a_3b_3 \end{pmatrix}$,

la 3$^{\text{ème}}$ colonne de D est le produit vectoriel : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \\ a_3b_3 \end{pmatrix}$.

Ces trois produits vectoriels sont orthogonaux au vecteur (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3) :
ils sont donc liés, car soit coplanaires soit nuls.

III- Une démonstration barycentrique plane du Th. de Pappus

Relisons maintenant **autrement** les formules donnant les coordonnées de $M_{i,j}$:

$$\begin{cases} x_{i,j} = \dfrac{a_i(a_jb_j) - a_j(a_ib_i)}{b_ja_j - a_ib_i} \\ y_{i,j} = \dfrac{b_i(b_ja_j) - b_j(a_ib_i)}{b_ja_j - a_ib_i} \end{cases}$$

Ainsi, $M_{i,j}$ est le barycentre du point C_i (a_i, b_i) affecté du coefficient a_jb_j et de C_j (a_j, a_j) affecté du coefficient (- a_ib_i). En posant $t_i = a_ib_i$:

R = $M_{1,2}$ est le barycentre de $C_1(t_2)$ et $C_2(-t_1)$
P = $M_{2,3}$ est le barycentre de $C_2(t_3)$ et $C_3(-t_2)$
Q = $M_{1,3}$ est le barycentre de $C_1(t_3)$ et $C_3(-t_1)$

Comme $\dfrac{\overline{PC_2}}{\overline{PC_3}} \times \dfrac{\overline{QC_3}}{\overline{QC_2}} \times \dfrac{\overline{RC_2}}{\overline{RC_1}} = 1$, PQR est une **transversale** du triangle $C_1C_2C_3$.

Le théorème de Pappus est donc réductible au théorème de Menelaüs*.

IV- Pascal et Maple

Le théorème de Pappus est encore vrai si les six points A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3, au lieu de se trouver sur deux droites, sécantes ou parallèles, sont sur une **conique** : cette extension (car 2 droites forment une conique, dite dégénérée) s'appelle le **Théorème de Pascal.**
Avec une simple règle, on peut donc savoir si 6 points d'un plan sont sur un cercle, ou une ellipse, ou une parabole, ou une hyperbole.
Utilisons **Maple** pour **vérifier** ce théorème.
Commençons par donner des coordonnées à nos 6 points du plan :

$$A_1\left|\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right., A_2\left|\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\right., A_3\left|\begin{matrix} x_3 \\ y_3 \end{matrix}\right., B_1\left|\begin{matrix} z_1 \\ t_1 \end{matrix}\right., B_2\left|\begin{matrix} z_2 \\ t_2 \end{matrix}\right., B_3\left|\begin{matrix} z_3 \\ t_3 \end{matrix}\right.$$

Appelons toujours M**i,j** le point d'intersection des droites AiBj et AjBi :

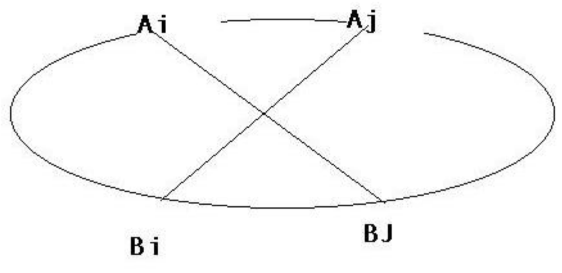

Figure 5.

*****Menelaüs, mathématicien grec, vers 100 après J.-C.

Les coordonnées de $M_{i,j}$ sont : $x_{i,j} = \dfrac{(y_i z_j - x_i t_j)(x_j - z_i) - (y_j z_i - x_j t_i)(x_i - z_j)}{(y_i - t_j)(x_j - z_i) - (y_j - t_i)(x_i - z_j)}$

$$y_{i,j} = \frac{(y_i z_j - x_i t_j)(y_j - t_i) - (y_j z_i - x_j t_i)(y_i - t_j)}{(y_i - t_j)(x_j - z_i) - (y_j - t_i)(x_i - z_j)} .$$

Soit $u_{i,j}$ le numérateur de $x_{i,j}$, $v_{i,j}$ le numérateur de $y_{i,j}$, $w_{i,j}$ leur dénominateur commun :

il y aura alignement si, et seulement si le déterminant D = $\begin{vmatrix} u_{2,3} & v_{2,3} & w_{2,3} \\ u_{1,3} & v_{1,3} & w_{1,3} \\ u_{1,2} & v_{1,2} & w_{1,2} \end{vmatrix}$ est nul.

Si, comme moi, vous vous précipitez sur **Maple** pour calculer D, vous serez immensément déçu car l'affichage de D occupe plusieurs pages ! C'est proprement hallucinant !
Continuons toutefois bravement : l'équation cartésienne générale d'une conique est

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

(la conique xy = 0 étant la configuration de Pappus).

Nous avons donc : $\begin{cases} ax_i^2 + by_i^2 + cx_i y_i + dx_i + ey_i + f = 0 \\ az_i^2 + bt_i^2 + cz_i t_i + dz_i + et_i + f = 0 \end{cases}$ pour i =1,2,3

d'où un système **linéaire** de 6 équations en les 6 inconnues a, b, c, d, e, f.
Comme une de ces inconnues est non nulle, il est nécessaire, et suffisant, que la matrice du système

$$C := \begin{bmatrix} x(1)^2 & y(1)^2 & x(1)\,y(1) & x(1) & y(1) & 1 \\ x(2)^2 & y(2)^2 & x(2)\,y(2) & x(2) & y(2) & 1 \\ x(3)^2 & y(3)^2 & x(3)\,y(3) & x(3) & y(3) & 1 \\ z(1)^2 & t(1)^2 & z(1)\,t(1) & z(1) & t(1) & 1 \\ z(2)^2 & t(2)^2 & z(2)\,t(2) & z(2) & t(2) & 1 \\ z(3)^2 & t(3)^2 & z(3)\,t(3) & z(3) & t(3) & 1 \end{bmatrix}$$

ait elle aussi un déterminant nul.
Notre problème se résume maintenant ainsi : prouver que det(C) = 0 implique D = 0.
Mais, et c'est la grande surprise annoncée, **Maple affirme que D = Det(C).**
En particulier, si les produits xy sont constants, C est évidemment de déterminant nul.
Cette égalité prouve déjà la **réciproque** du théorème de **Pascal** et explique l'invraisemblable longueur de D puisque det(C) comporte 720 termes.
Néanmoins, on peut **voir** l'égalité D = det(C) en prenant un cas particulier (qui d'ailleurs ne nuirait en rien à la généralité d'un raisonnement) :

celui où l'origine O est l'intersection de A_1A_2 et B_1B_2 .

On a donc x(1)=x(2)=t(1)=t(2) =0 et **Maple** indique alors que D et det(C) se factorisent tous deux en :

$$
\begin{aligned}
&-(-z(2)+z(1))\,(y(1)-y(2))\,(y(1)\,z(1)\,z(3)\,t(3)\,x(3)\,y(2)\\
&\quad+y(1)\,z(1)\,x(3)\,y(3)\,y(2)\,z(2)+y(1)\,z(1)\,z(3)\,y(3)\,z(2)\,t(3)\\
&\quad-y(1)\,z(3)\,x(3)^2\,t(3)\,y(2)+y(1)\,z(2)\,z(3)\,t(3)\,x(3)\,y(2)\\
&\quad-y(1)\,z(1)\,y(2)\,z(3)\,x(3)\,y(3)-y(1)\,z(2)\,y(2)\,z(3)\,x(3)\,y(3)\\
&\quad+y(1)\,y(2)\,z(3)^2\,x(3)\,y(3)-y(1)\,z(1)\,z(3)\,t(3)\,z(2)\,y(2)\\
&\quad-y(1)\,z(1)\,z(2)\,t(3)\,x(3)\,y(3)-z(1)\,y(3)^2\,z(2)\,t(3)\,z(3)\\
&\quad+z(1)\,y(3)\,z(2)\,t(3)^2\,x(3)+y(2)\,z(1)\,z(3)\,y(3)\,z(2)\,t(3)\\
&\quad-y(2)\,z(1)\,z(2)\,t(3)\,x(3)\,y(3))
\end{aligned}
$$

V- Le dernier secret du théorème de Pappus ?

Pourquoi le déterminant D d'ordre 3 qui traduit l'alignement, aux 9 termes si compliqués, est-il égal au déterminant si simple C d'ordre 6 qui traduit la " conicité " ?
Je n'ai pas pu trouvé de réponse convaincante : ami lecteur, sauriez-vous percer ce mystère ?

Annexe 1 : l'application point de vue

On se donne un plan (P) et un point S hors de (P) ; à tout point M de l'espace on fait correspondre quand c'est possible le point M' intersection de la droite SM avec le plan (P) :

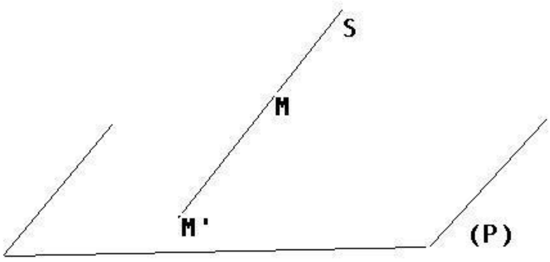

Figure 2.

Les points M qui appartiennent au plan (Q) parallèle à (P) et passant par S n'ont pas d'image (finie) ; l'image d'une droite de l'espace est une droite du plan (P) (en général) ; et surtout, si 2 droites sécantes ont leur point commun sur (Q), alors leurs images deviennent 2 droites parallèles de (P) : **telle est la grande vertu de l'application point de vue.**
Il suffit donc de placer le point O de la *figure 1.*, et lui seul, sur le plan d'exception (Q) pour se ramener au cas **plus simple** où les droites portant les points sont **parallèles** :

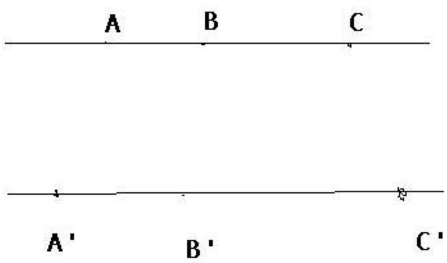

Figure 3.

Les $M_{i,j}$ seront alignés car à la fois dans le plan (O,Ox,Oy) et dans le plan (S,I,J,K) ; mais une deuxième application point de vue peut faire en sorte que AA' et CC' deviennent **en outre** parallèles, d'où la configuration encore plus simple suivante :

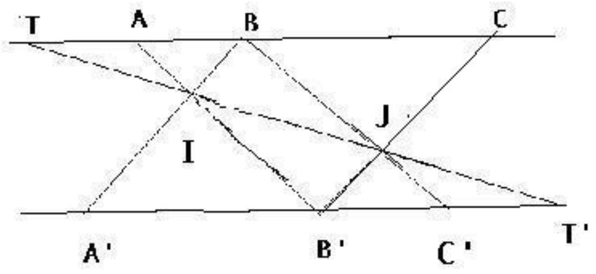

Figure 4.

Nous allons démontrer que sur IJ se trouve le centre K du parallélogramme A A' C' C, mais il est demandé ici au lecteur des connaissances sur le groupe des homothéties-translations du plan. Le chemin A → B' → C est un produit de deux homothéties de centres I et J ; on passe donc de A à C par une homothétie de centre T. De même, A' devient C' par une homothétie de centre T'. Les rapports de ces deux homothéties de centres T et T' ont un produit égal à 1 ; il en résulte que T A' T' C est aussi un parallélogramme, et donc que l'intersection K des diagonales AC' et A'C est bien sur IJ.

Annexe 2 : un « bug » dans Maple VI

Aucun logiciel mathématique ne peut se prévaloir d'une justesse absolue, soit que des erreurs de programmation aient été commises, soit que les algorithmes numériques, les plus fragiles, aient été poussé dans leurs retranchements, soit que des objectifs trop ambitieux aient été assignés au logiciel.
Ainsi, dans la version 6.01 de **Maple VI**, j'ai détecté l'erreur suivante :

```
> f:=cos(sin(x))-sin(cos(x));
```

$$f := \cos(\sin(x)) - \sin(\cos(x))$$

```
> maximize(f);
```

$$1 + \sin(1)$$

```
> ce résultat est juste !

> minimize(f);
```

$$1 - \sin(1)$$

```
> evalf(1-sin(1));
```

$$.1585290152$$

```
> f(.7)=.1519714869 : le minimum affiché est donc faux !
```

FIN (écrit en mai 2002)