35 - REPRÉSENTATION INTÉGRALE D'UNE SEMI-NORME DU PLAN

www.daniel-saada.eu

Utilisateurs de Chrome ou de Firefox, désactivez la visionneuse PDF intégrée à ces navigateurs et préférez-lui votre propre lecteur de PDF, sinon les liens seront inactifs.

Cet article, essentiellement tiré d'un exercice de **[1]**, a le même thème que ma note 23 [1] :

toute norme du plan a une représentation intégrale.

La démonstration donnée ici est cependant très différente et il m'a paru utile de la publier, n'étant pas redondante avec la note citée. De plus, les preuves sont complètes : l'article est donc autonome et peut servir de base à un exposé.

1) Semi-normes du plan

Le plan R^2 est identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Une fonction $N:\mathbb{C}\to[0,+\infty[$ est appelée une semi-norme si :

$$N(\lambda z)=|\lambda|N(z) \text{ pour tout } \lambda\in R \text{ et tout } z\in\mathbb{C} \qquad \textbf{(1)}$$

$$N(z_1+z_2)\le N(z_1)+N(z_2) \text{ pour tous } z_1,z_2\in\mathbb{C} \qquad \textbf{(2)}$$

Toute norme est une semi-norme ; $N(x,y)=|x-y|$ est une semi-norme qui n'est pas une norme.

Supposons qu'il existe $z_0\ne 0$ tel que $N(z_0)=0$: si $e^{i\theta}=z_0/|z_0|$, alors il existe $k\in R^+$ tel que

$$N(x+iy)=k\,|x\sin\theta-y\cos\theta|.$$

En effet, $(e^{i\theta},ie^{i\theta})$ est une base du plan et $z=x+iy$ se décompose en $ae^{i\theta}+bie^{i\theta}$ et donc $N(z)\le N(bie^{i\theta})$. Comme $bie^{i\theta}=ae^{i\theta}-z$, $N(bie^{i\theta})\le N(z)$ et donc $N(z)=N(bie^{i\theta})$.

Conclusion : $N(x+iy)=|b|N(ie^{i\theta})=k\,|x\sin\theta-y\cos\theta|$, N est donc la valeur absolue d'une forme linéaire.

Qu'une semi-norme N qui n'est pas une norme ait une représentation intégrale est l'évidence puisque, par exemple, $N(x+iy)=\int_0^{2\pi}|x\sin t-y\cos t|\,d\mu(t)$ où μ est la mesure de Dirac définie par $\mu(\theta)=k=N(ie^{i\theta})$. Comme on peut forcer θ à rester dans $[0,\pi]$ (en changeant z_0 en son opposé), on peut aussi bien écrire $N(x+iy)=\int_0^{\pi}|x\sin t-y\cos t|\,d\mu(t)$.

2) Deux caractérisations des semi-normes

Soit $N:\mathbb{C}\to[0,+\infty[$ vérifiant **(1)** ; les trois assertions suivantes sont équivalentes :

a) N **est une semi-norme,**

[1] http://www.daniel-saada.eu/Notes/23-Representation-integrale-des-normes-du-plan.pdf

b) $\{z : N(z) \le 1\}$ **est convexe,**

c) Pour tous u, v, w **vérifiant** $u < v < w < u + \pi$ **on a**

$$N(e^{iu})\sin(w-v) + N(e^{iw})\sin(v-u) \ge N(e^{iv})\sin(w-u) \qquad \textbf{(3)}$$

Preuves :

• Que **a)** implique **b)** est laissée au lecteur. Pour prouver que **b)** implique **a)**, observons que

$\dfrac{N(u)\dfrac{u}{N(u)} + N(v)\dfrac{v}{N(v)}}{N(u)+N(v)}$ est dans le convexe et donc $N(u+v) \le N(u) + N(v)$.

• soit $u < v < w < u + \pi$: e^{iv} est combinaison linéaire de (e^{iu}, e^{iw}) ; en résolvant le système

$$(x\cos u + y\cos w = \cos v,\ x\sin u + y\sin w = \sin v)$$

il vient

$$e^{iv} = \frac{\sin(w-v)}{\sin(w-u)}e^{iu} + \frac{\sin(v-u)}{\sin(w-u)}e^{iw} \qquad \textbf{(4)}$$

Comme les trois sinus sont positifs, $\sin(w-u)N(e^{iv}) \le \sin(w-v)N(e^{iu}) + \sin(v-u)N(e^{iw})$,

ce qui prouve que **a) implique c)**.

• Supposons **c)** vraie et prouvons $N(z+z') \le N(z) + N(z')$.

Posons $z = re^{iu}, z' = se^{iw}$, en supposant $u < w < u + \pi$ (ce cas suffit) et posons $z + z' = \rho e^{iv}$.

On a alors $e^{iv} = \dfrac{r}{\rho}e^{iu} + \dfrac{s}{\rho}e^{iw}$ et $u < v < w$: **c)** entraîne $N(e^{iv}) \le \dfrac{r}{\rho}N(e^{iu}) + \dfrac{s}{\rho}N(e^{iw})$, d'où $N(z+z') \le N(z) + N(z')$.

Une semi-norme N du plan est entièrement déterminée par $f(\theta) = N(e^{i\theta})$ car $N(re^{i\theta}) = rN(e^{i\theta})$ pour tout $r \ge 0$; on peut même restreindre θ à parcourir $[0,\pi[$ car $f(\theta+\pi) = f(\theta)$.

En utilisant $|N(u) - N(v)| \le N(u-v)$, on montre que f, de période π, est continue sur R puisque

$$|f(t) - f(t')| \le N(e^{it} - e^{it'}) \le |\cos t - \cos t'|\,N(1,0) + |\sin t - \sin t'|\,N(0,1).$$

La fonction f, si elle dérive d'une norme, est donc assujettie à la condition :

$$f(u)\sin(w-v) + f(w)\sin(v-u) \ge f(v)\sin(w-u) \text{ quand } u < v < w < u + \pi.$$

En particulier, si $v = (u+w)/2$, $f(u) + f(w) \ge 2f(v)\cos\left(\dfrac{w-u}{2}\right)$.

3) Soit $N_\mu(x+iy) = \int_{[0,\pi[} |x\sin t - y\cos t|\,d\mu(t)$**, où** μ **est une mesure positive et bornée sur** $[0,\pi[$ [2] **:** N_μ **est une semi-norme et μ est unique.**

Il est facile de vérifier que N_μ **est une semi-norme.**

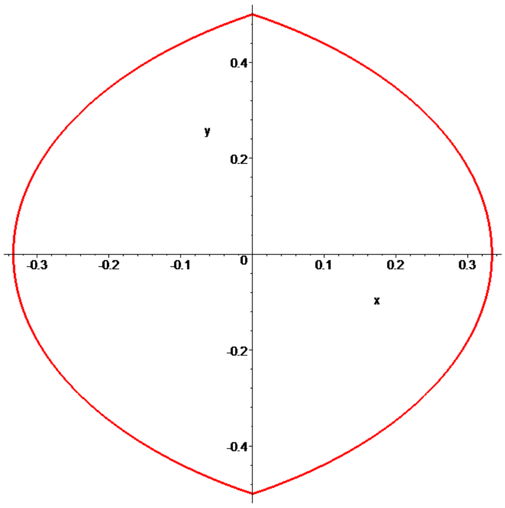
[2] C'est un abus de langage : μ est en fait définie sur la tribu des boréliens de $[0,\pi[$, lesquels sont les intersections des boréliens de R avec $[0,\pi[$.

Si N_μ n'est pas une norme, il existe $(x,y)\neq(0,0)$ tel que $\int_{[0,\pi[}|x\sin t-y\cos t|\,d\mu(t)=0$: on en déduit que $\varphi: t\mapsto|x\sin t-y\cos t|$ est nulle presque partout pour µ sur $[0,\pi[$. Comme φ ne s'annule qu'en un point de $[0,\pi[$, µ est une mesure de Dirac concentrée en ce point.

Exemples.

- Si µ est la mesure de Lebesgue λ, $N_\lambda(e^{i\theta})=\int_0^\pi|\sin(t-\theta)|\,dt=2$ et donc $N(x,y)=2\sqrt{x^2+y^2}$.
- Si µ est l'addition de λ et de la mesure de Dirac en $\pi/2$, alors $N_\mu(x,y)=2\sqrt{x^2+y^2}+|x|$.

Voici le cercle unité pour N_μ :



On observera les deux points de non-différentiabilité en $e^{\pm i\pi/2}$: si µ a un atome en t, le cercle n'aura pas de tangente en $e^{\pm it}$. Comme le nombre d'atomes d'une mesure est dénombrable, on peut comprendre (ce n'est pas une démonstration, elle sera faite au **§ 10**) qu'un cercle pour une norme comporte un nombre dénombrable au plus de points sans tangente [3].

- Supposons µ portée par un ensemble fini $\{t_1,t_2,\dots,t_n\}\subset[0,\pi[$, alors

$$N(x,y)=\sum_1^n|x\sin t_k-y\cos t_k|.\mu(t_k).$$

On supposera bien sûr aucun $\mu(t_k)$ nul ; N est une somme de valeurs absolues de formes linéaires. Le cercle unité pour N est un polygone convexe de centre O et de sommets $\pm r(k)e^{it_k}$ avec

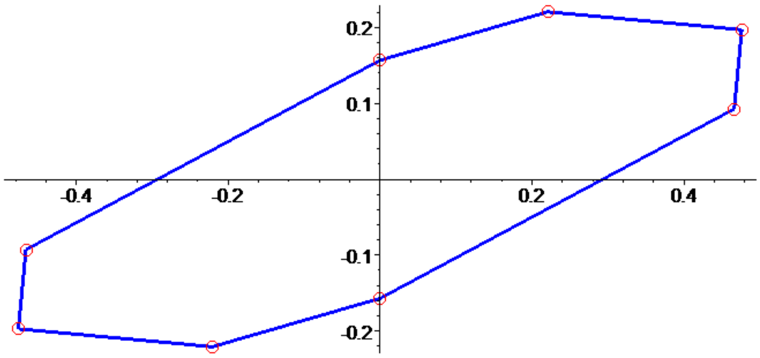
$r(k)=\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}|\sin(t_i-t_k)|\,m_k}$: ne reste plus qu'à joindre ces 2n points, ce qu'on peut faire avec Maple par ce programme que je dois à Alain Esculier.

> restart : with(plots) : m:= (k,n) -> à définir : t:=k -> à définir :

[3] On pourra consulter http://www.daniel-saada.eu/fichiers/29-Convexes_compacts_du_plan.pdf

```
> bouleDaniel:= proc(n) local tp :
    tp:=evalf([ seq(1/add(m(k,n)*abs(sin(t(i)-t(k))),k=1..n)*[cos(t(i)), sin(t(i))],i=1..n)]):
    tp:=[op(tp),op(expand(-tp))]:
   print(cat("sommets de la boule : ",2*n),tp);
    display([polygonplot(tp,color=blue,thickness=3,style=line),
            pointplot(tp,symbol=circle,symbolsize=20,color=red)],scaling=constrained);
end:
```

Pour $n=4$, $t_k=\pi/2^k$, $\mu(t_k)=k\pi/n$, on obtient le polygone



dont les 8 sommets ont pour coordonnées

$$\pm(0,0.16),\ \pm(0.22,0.22),\ \pm(0.48,0.20),\ \pm(0.47,0.09).$$

Montrons que $N_\mu = N_{\mu'}$ implique $\mu=\mu'$ (μ' étant une mesure positive et bornée sur $[0,\pi[$).

a) Coefficients de Fourier de $f_\mu(t)=N_\mu(e^{it})$

Comme f_μ est continue et de période π, son nième coefficient de Fourier est $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f_\mu(t)e^{2int}dt$.

Bornons-nous à calculer $\int_0^\pi N_\mu(e^{it})e^{2\mathrm{int}}dt$, $n\in\mathbb{Z}$.

Comme $N_\mu(e^{it}) = \int_0^\pi |\sin(t-x)\mu(dx)$, $\int_0^\pi N_\mu(e^{it})e^{2\mathrm{int}}dt = \int_0^\pi \left[\int_0^\pi |\sin(t-x)|e^{2\mathrm{int}}d\mu(x)\right]dt$.

Par Fubini et le changement de variables $t \leftarrow t-x$, il vient

$$\int_0^\pi \left[\int_0^\pi |\sin(t-x)|e^{2\mathrm{int}}dt\right]d\mu(x) = \int_0^\pi \left[\int_{-x}^{\pi-x} |\sin t|e^{2\mathrm{in}(t+x)}dt\right]d\mu(x).$$

Comme $|\sin|$ est de période π : $\int_{-x}^{\pi-x} |\sin t|e^{2\mathrm{in}(t+x)}dt = e^{2inx}\int_0^\pi |\sin t|e^{2\mathrm{int}}dt$

et donc $\int_0^\pi N_\mu(e^{it})e^{2\mathrm{int}}dt = \int_0^\pi |\sin t|e^{2\mathrm{int}}dt \times \int_0^\pi e^{2inx}d\mu(x) = \dfrac{2}{1-4n^2}\int_0^\pi e^{2inx}d\mu(x)$.

On a donc $\int_0^\pi N_\mu(e^{it})e^{2\mathrm{int}}dt = \dfrac{2}{1-4n^2}\int_0^\pi e^{2\mathrm{int}}d\mu(t)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ **(5)**

b) Les mesures µ et µ' sont égales

D'après **a)**, $\int_{[0,\pi[} e^{2inx}d\mu(x) = \int_{[0,\pi[} e^{2inx}d\mu'(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Transportons les mesures µ et µ' sur le cercle $S = \left\{e^{it} : t \in R\right\}$ au moyen de l'application $h(t) = e^{2it}$: h est une bijection continue de $[0,\pi[$ sur S. Sa réciproque h^{-1} ne peut être continue partout sur S sinon $[0,\pi[$ serait compact et en effet, h^{-1} est discontinue en $z=1$; comme elle est seulement discontinue en ce point, elle est mesurable[4].

En posant $\sigma = \mu \circ h^{-1}$ et $\sigma' = \mu' \circ h^{-1}$, on définit deux mesures positives et bornées sur S.

Le théorème du transfert (**[3]**, **page 330**) donne alors $\int_S f\,d\sigma = \int_{[0,\pi[}(f\circ h)d\mu$[5] pour toute f σ-intégrable sur S. De façon similaire et comme h est bijective, $\int_{[0,\pi[} g\,d\mu = \int_S g\circ h^{-1}\,d\sigma$ pour toute fonction g µ-intégrable sur $[0,\pi[$. Donc

$$\int_{[0,\pi[} e^{2inx}d\mu(x) = \int_{[0,\pi[} h^n(x)d\mu(x) = \int_S s^n d\sigma(s).$$

L'égalité $\int_S s^n d\sigma = \int_S s^n d\sigma'$, vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$, s'étend par linéarité aux combinaisons linéaires finies des monômes $(s^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, qu'on appelle polynômes de Laurent[6]. Ces polynômes sont denses pour la norme uniforme dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(S,\mathbb{C})$ d'après le théorème de Stone-Weierstrass. Il en résulte que $\int_S f d\sigma = \int_S f d\sigma'$ pour toute f continue sur S à valeurs complexes.

Déduisons-en $\sigma = \sigma'$:

---

[4] Le lecteur est invité à justifier cette affirmation.

[5] Exprimée sous la forme $\int_{h([0,\pi[)} f\,d\sigma = \int_{[0,\pi[}(f\circ h)d(\sigma\circ h)$, c'est la formule du changement de variable.

[6] Par analogie avec les séries de Laurent.

(i) Tout ouvert U non vide de S est de la forme $\{s : f(s) > 0\}$ avec f continue : il suffit de poser

$$f(s) = \frac{d(s, S-U)}{d(s, S-U) + d(s,a)}$$

où d est la distance euclidienne et a un point de U [7].

Posons $f_n(s) = \min(1, nf(s))$. Les fonction f_n étant continues, on a $\int_S f_n \, d\sigma = \int_S f_n \, d\sigma'$ pour tout n.

Comme la suite (f_n) est croissante et sa limite simple est la fonction indicatrice de U, le théorème de Beppo-Levi donne $\sigma(U) = \sigma'(U)$.

(ii) Deux mesures qui coïncident sur les ouverts sont toujours égales sur les boréliens : c'est une conséquence du théorème de la classe monotone.

Les boréliens B qui vérifient $\sigma(B) = \sigma'(B)$ forment une famille monotone $\mathcal{M}$.

Cette famille monotone contient les ouverts et est stable par intersection finie : $\mathcal{M}$ contient donc la tribu engendrée par les ouverts qui est la tribu des boréliens.

On a donc bien $\sigma = \sigma'$; enfin, $\mu = \mu'$ car $\mu = \sigma \circ h$ et $\mu' = \sigma' \circ h$.

Remarque. L'unicité tombe en défaut si µ et µ' sont « définies » sur $[0, \pi]$: les mesures de Dirac en 0 et π sont distinctes et cependant $\int_{[0,\pi]} e^{2inx} d\mu(x) = \int_{[0,\pi]} e^{2inx} d\mu'(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Dans toute la suite, on se donne une norme N du plan ; on veut prouver qu'il existe une mesure μ positive bornée sur $[0, \pi[$ telle que $N(x+iy) = \int_0^\pi \lvert x \sin t - y \cos t \rvert \, d\mu(t)$.

4) Pour tout entier $n \geq 3$, il existe une norme N_n telle que $\{z : N_n(z) \leq 1\}$ soit le polygone plein fermé (P_n) de sommets $\dfrac{e^{it_j}}{N(e^{it_j})}$, où $t_j = (j-1)\pi / n$, $j \in \{1, \ldots, 2n-1, 2n\}$,

a) Existence de N_n

Les abscisses t_j étant croissantes et également espacées, le polygone plein fermé de côtés $[e^{it_j}, e^{it_{j+1}}]$ est régulier, convexe et de centre O. (P_n) restera symétrique car $\dfrac{e^{it_{j+n}}}{N(e^{it_{j+n}})} = -\dfrac{e^{it_j}}{N(e^{it_j})}$.

Montrons que (P_n) est convexe en raisonnant sur trois sommets et trois côtés consécutifs : si M_j est le point (x_j, y_j) d'affixe $\dfrac{e^{it_j}}{N(e^{it_j})}$, on va prouver que l'origine O et M_j sont de part et d'autre de la droite qui joint M_{j-1} à M_{j+1}.

[7] Ce résultat s'étend à tout espace métrique (E, d).

Cette droite a pour équation cartésienne $D(x,y)=0$, où

$$D(x,y)=\left(x-\frac{\cos t_{j+1}}{N(e^{it_{j+1}})}\right)\left(\frac{\sin t_{j+1}}{N(e^{it_{j+1}})}-\frac{\sin t_{j-1}}{N(e^{it_{j-1}})}\right)-\left(y-\frac{\sin t_{j+1}}{N(e^{it_{j+1}})}\right)\left(\frac{\cos t_{j+1}}{N(e^{it_{j+1}})}-\frac{\cos t_{j-1}}{N(e^{it_{j-1}})}\right).$$

Comme $D(0,0)$ est du signe de $\sin(t_{j-1}-t_{j+1})$, qui est négatif, il nous faut montrer que $D(x_j,y_j)>0$. Or $D(x_j,y_j)=\dfrac{\sin(t_{j+1}-t_j)}{N(e^{it_{j+1}})N(e^{it_j})}+\dfrac{\sin(t_j-t_{j-1})}{N(e^{it_j})N(e^{it_{j-1}})}-\dfrac{\sin(t_{j+1}-t_{j-1})}{N(e^{it_{j+1}})N(e^{it_{j-1}})}$, qui est positif en vertu de **(3)**.

Le compact (P_n) étant d'intérieur non vide, convexe et symétrique est le disque unité fermé d'une norme du plan, définie par $N_n(z)=\inf\left\{a>0:\dfrac{z}{a}\in(P_n)\right\}$ (théorème de la jauge [8]).

b) N_n est affine sur les côtés du polygone de sommets e^{it_j}

Soit C_j le point d'affixe e^{it_j}, C un point du segment C_jC_{j+1}, z l'affixe de C.

D'une part, $z=re^{it}$ avec $t\in[t_j,t_{j+1}]$ et donc selon **(4)**

$e^{it}=\dfrac{\sin(t_{j+1}-t)}{\sin(t_{j+1}-t_j)}e^{it_j}+\dfrac{\sin(t-t_j)}{\sin(t_{j+1}-t_j)}e^{it_{j+1}}$, que nous abrégerons en $e^{it}=ae^{it_j}+be^{it_{j+1}}$.

D'autre part, il existe $\lambda\in[0,1]$ tel que $z=\lambda e^{it_j}+(1-\lambda)e^{it_{j+1}}$, d'où l'on déduit $\lambda=ar$, $1-\lambda=br$, et donc $r=\dfrac{1}{a+b}$.

Soit P l'intersection de OC avec M_jM_{j+1} : l'affixe de P est ρe^{it} et il existe $\mu\in[0,1]$ tel que

$$\rho e^{it}=\mu\frac{e^{it_j}}{N(e^{it_j})}+(1-\mu)\frac{e^{it_{j+1}}}{N(e^{it_{j+1}})}.$$

On a donc $\rho a=\dfrac{\mu}{N(e^{it_j})}$, $\rho b=\dfrac{1-\mu}{N(e^{it_{j+1}})}$ et donc $\rho=\dfrac{1}{aN(e^{it_j})+bN(e^{it_{j+1}})}$.

Comme $N_n(re^{it})=\dfrac{r}{\rho}N_n(\rho e^{it})$ et $N_n(\rho e^{it})=1$ par hypothèse, il vient

$$N_n(re^{it})=r/\rho=\frac{aN(e^{it_j})+bN(e^{it_{j+1}})}{a+b}=\lambda N(e^{it_j})+(1-\lambda)N(e^{it_{j+1}}).$$

On a bien prouvé que $N_n(\lambda e^{it_j}+(1-\lambda)e^{it_{j+1}})=\lambda N_n(e^{it_j})+(1-\lambda)N_n(e^{it_{j+1}})$ **(6)**

puisque $N_n(e^{it_j})=N(e^{it_j})$ et $N_n(e^{it_{j+1}})=N(e^{it_{j+1}})$.

c) Forme explicite de N_n

Par homogénéité, $N_n\left(ae^{it_j}+be^{it_{j+1}}\right)=aN(e^{it_j})+bN(e^{it_{j+1}})$ quand a et b sont positifs.

---

[8] http://bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./j/jauge.html

En particulier, si $t\in[t_j,t_{j+1}]$, comme $e^{it}=\dfrac{\sin(t_{j+1}-t)}{\sin(t_{j+1}-t_j)}e^{it_j}+\dfrac{\sin(t-t_j)}{\sin(t_{j+1}-t_j)}e^{it_{j+1}}$, il vient

$$N_n(e^{it})=\frac{\sin(t_{j+1}-t)N(e^{it_j})+\sin(t-t_j)N(e^{it_{j+1}})}{\sin(t_{j+1}-t_j)} \qquad \textbf{(7)}$$

ce qui explicite N_n sur le plan tout entier.

Remarque. Comme les $\dfrac{e^{it_j}}{N(e^{it_j})}$ appartiennent tous à $\{z:N(z)=1\}$, il en résulte $N_n\geq N$.

Vérifions cela : si $t\in]t_k,t_{k+1}[$, alors $t_k<t<t_{k+1}<t_n+\pi$ et donc

$$N(e^{it})\sin(t_{k+1}-t_k)\leq N(e^{it_k})\sin(t_{k+1}-t)+N(e^{it_{k+1}})\sin(t-t_k).$$

D'où $N(e^{it})\leq\dfrac{N(e^{it_k})\sin(t_{k+1}-t)+N(e^{it_{k+1}})\sin(t-t_k)}{\sin(t_{k+1}-t_k)}=N_n(e^{it})$

ce qui jette un autre éclairage sur N_n.

5) Il existe une mesure μ_n discrète telle que $N_n=N_{\mu_n}$

a) Il existe des réels $m_k\geq 0$ tels que $N_n(e^{it_j})=\sum_{k=1}^{n}m_k\,|\sin(t_j-t_k)|$ pour $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Introduisons la matrice carrée A d'ordre n de terme général $a_{j,k}=|\sin(t_j-t_k)|$: nous allons prouver que A est inversible. En effet, soit B la matrice d'ordre n définie par :

$b_{i,i}=-\sin(t_{i+1}-t_{i-1})=-\sin(2\pi/n)$,
$b_{i,i+1}=\sin(t_i-t_{i-1})=\sin(\pi/n)$, i allant de 1 à n-1,
$b_{i,i-1}=\sin(t_{i+1}-t_i)=\sin(\pi/n)$, i allant de 2 à n ;
$b_{1,n}=b_{n,1}=\sin(\pi/n)$,
$b_{i,j}=0$ partout ailleurs.

Le produit AB est la matrice diagonale D de terme général $d_{i,i}=2\sin^2(\pi/n)$: d'où

$$A^{-1}=\frac{1}{2\sin^2(\pi/n)}B.$$

On en déduit

$$2\sin^2(\pi/n).m_j=\sin(t_{j+1}-t_j)N(e^{it_{j-1}})-\sin(t_{j+1}-t_{j-1})N(e^{it_j})+\sin(t_j-t_{j-1})N(e^{it_{j+1}}) \qquad \textbf{(8)}$$

d'où $m_j\geq 0$ en vertu de **(3)**.

Soit μ_n la mesure discrète positive définie par $\mu_n(t_i)=m_i$, i allant de 1 à n.

b) $N_n(e^{it_j})=\sum_{k=1}^{n}m_k\,|\sin(t_j-t_k)|$ pour $j\in\{n+1,\ldots,2n\}$

En effet, $N_n(e^{i(t_j+\pi)})=N_n(e^{it_j})$ et $|\sin(t_j+\pi-t_k)|=|\sin(t_j-t_k)|$.

c) $N_n(e^{it})=\sum_{k=1}^{n} m_k\,|\sin(t-t_k)|$ **pour tout réel** t

Utilisons $N_n(e^{it})=\dfrac{\sin(t_{j+1}-t)N(e^{it_j})+\sin(t-t_j)N(e^{it_{j+1}})}{\sin(t_{j+1}-t_j)}$ quand $t\in[t_j,t_{j+1}]$: d'après **b)**, il suffit d'établir que pour tout (j,k),

$$|\sin(t-t_k)|=\frac{\sin(t_{j+1}-t)\,|\sin(t_j-t_k)|+\sin(t-t_j)\,|\sin(t_{j+1}-t_k)|}{\sin(t_{j+1}-t_j)}.$$

L'égalité $e^{it}=\dfrac{\sin(t_{j+1}-t)}{\sin(t_{j+1}-t_j)}e^{it_j}+\dfrac{\sin(t-t_j)}{\sin(t_{j+1}-t_j)}e^{it_{j+1}}$ montre que

$$\sin t=\frac{\sin(t_{j+1}-t)\sin t_j+\sin(t-t_j)\sin t_{j+1}}{\sin(t_{j+1}-t_j)} \text{ pour tout } t\in[t_j,t_{j+1}]$$

et donc, par translation, $\sin(t-t_k)=\dfrac{\sin(t_{j+1}-t)\sin(t_j-t_k)+\sin(t-t_j)\sin(t_{j+1}-t_k)}{\sin(t_{j+1}-t_j)}$.

En distinguant les cas $t_k\le t_j$, $t_k\ge t_{j+1}$, on arrive sans mal à ce qui était souhaité :

$$|\sin(t-t_k)|=\frac{\sin(t_{j+1}-t)\,|\sin(t_j-t_k)|+\sin(t-t_j)\,|\sin(t_{j+1}-t_k)|}{\sin(t_{j+1}-t_j)}.$$

d) $N_n(x+iy)=\int_0^{\pi}|x\sin t-y\cos t|\,\mu_n(dt)$

En effet, $N_n(e^{i\theta})=\sum_{k=1}^{n} m_k\,|\sin(\theta-t_k)|=\int_0^{\pi}|\cos\theta\sin t-\sin\theta\cos t|\,\mu_n(dt)$;

en écrivant $x+iy=re^{i\theta}$, on arrive à $N_n(x+iy)=\int_0^{\pi}|x\sin t-y\cos t|\,\mu_n(dt)$.

Remarque. Comme les m_i sont uniques, on retrouve l'unicité de la mesure μ_n associée à N_n.

6) Les mesures μ_n sont uniformément bornées

Additionnons, pour j allant de 1 à n , les deux membres de **(8) :**

$$2\sin^2(\pi/n).m_j=\sin(t_{j+1}-t_j)N(e^{it_{j-1}})-\sin(t_{j+1}-t_{j-1})N(e^{it_j})+\sin(t_j-t_{j-1})N(e^{it_{j+1}}).$$

Comme $\sum_{j=1}^{n}N(e^{it_{j-1}})=\sum_{j=1}^{n}N(e^{it_j})=\sum_{j=1}^{n}N(e^{it_{j+1}})$,

$$\sum_1^n m_j=\frac{2\sin(\pi/n)-\sin(2\pi/n)}{2\sin^2(\pi/n)\pi/n}\times\frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n}N(e^{it_j})$$

et donc $\sum_1^n m_j$ tend, pour n infini, vers $\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}N(e^{it})\,dt$.

La suite $\mu_n([0,\pi[)=\int_0^{\pi}1\,d\mu_n$ est convergente, donc majorée, disons par K.

7) $N_n(e^{it})$ converge uniformément vers $N(e^{it})$ sur R

Nous donnons une démonstration formelle puis nous illustrerons le résultat.

Soit j_n l'entier vérifiant $t_{j_n} \leq t \leq t_{j_{n+1}}$; on posera $t_n = t_{j_n}$ et $t_{n+1} = t_{j_{n+1}}$.

On de donne $\varepsilon > 0$.

a) A partir d'un certain rang n, $|N(e^{it}) - N(e^{iu})| \leq \varepsilon$ si $u = t_n$ ou $u = t_{n+1}$.

En effet, N étant continue et périodique est uniformément continue et $|t-u| \leq \pi / n$.

b) En posant $a_n = t_{n+1} - t$ et $b_n = t - t_n$, la formule **(5)** donne

$$N_n(e^{it}) - N(e^{it}) = \left(\frac{\sin a_n + \sin b_n}{\sin(a_n + b_n)} - 1\right) N(e^{it}) + \frac{\sin a_n}{\sin(a_n + b_n)}\left(N(e^{it_n}) - N(e^{it})\right)$$
$$+ \frac{\sin b_n}{\sin(a_n + b_n)}\left(N(e^{it_{n+1}}) - N(e^{it})\right).$$

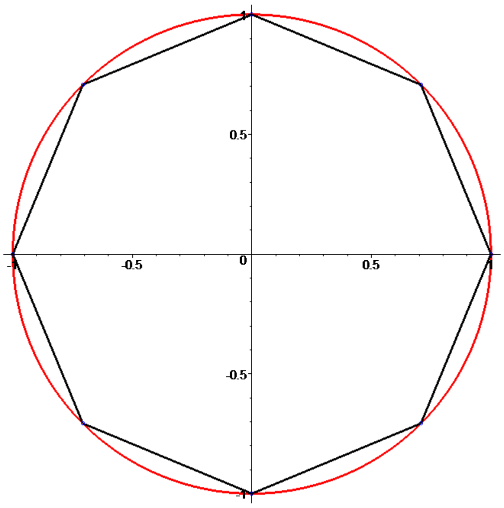
Comme $0 \leq a_n, b_n \leq a_n + b_n = \pi / n$, $\dfrac{\sin a_n}{\sin(a_n + b_n)}$ et $\dfrac{\sin b_n}{\sin(a_n + b_n)}$ sont positifs et inférieurs à 1.

Aussi $|N_n(e^{it}) - N(e^{it})| \leq \left|\dfrac{\sin a_n + \sin b_n}{\sin(a_n + b_n)} - 1\right| N(e^{it}) + 2\varepsilon$; $N(e^{it})$ est majorée sur R car continue et périodique ; enfin $0 \leq \dfrac{\sin a_n + \sin b_n}{\sin(a_n + b_n)} - 1 \leq \dfrac{\pi / n}{\sin(\pi / n)} - 1$: la convergence uniforme de N_n vers N sur la circonférence euclidienne unité est établie.

En particulier, $N(x+iy)$ est la limite en n de $N_n(x+iy)$.

c) Illustration

La norme N est une fonction numérique continue sur le cercle S qu'on approxime par des polygones réguliers inscrits :



Comme $N_n = N$ sur les sommets et N_n est affine sur les cotés **(6)**, la convergence uniforme de N_n vers N provient de la continuité uniforme de N.

8) La suite des mesures $\sigma_n = \mu_n \circ h^{-1}$ converge vers une mesure σ

a) Extension de la mesure discrète μ_n à $[0,2\pi[$ et nouvelle écriture de N_n

D'abord, on peut écrire $N_n(x+iy) = \sum_{k=1}^{n} m_k \,|\, x\sin t_k - y\cos t_k \,| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} m_k \,|\, x\sin t_k - y\cos t_k \,|$ en prolongeant μ_n sur $[0,2\pi[$ par $\mu_n(t_k) = m_{k-n}$ quand k va de $n+1$ à $2n$. Ainsi, $\mu_n(t_k+\pi) = \mu_n(t_k)$ pour k allant de 1 à n.

On a donc $N_n(x+iy) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\, x\sin t - y\cos t \,|\, d\mu_n(t)$; plus généralement,

$$\int_0^{2\pi} f\, d\mu_n = \sum_{k=1}^{2n} m_k f(t_k) = 2\int_0^{\pi} f\, d\mu_n \,.$$

On définit la mesure discrète et positive σ_n sur le cercle par $\sigma_n(\pm e^{it_k}) = m_k$, k allant de 1 à n.

Évidemment, σ_n est symétrique :

pour tout sous-ensemble A de S, $\sigma_n(A) = \sigma_n(-A)$ et $\int_S f(-x)\,d\sigma_n(x) = \int_S f\,d\sigma_n$.

La masse de σ_n est $\sum_{k=1}^{2n} m_k$, qui a pour limite $\int_0^{\pi} N(e^{it})\,dt$ (voir **§ 6**).

Grâce aux formules d'Euler, $x\sin t - y\cos t = P_{x,y}(e^{it})$ où $P_{x,y}$ est un polynôme de Laurent, et

$N_n(x+iy) = \frac{1}{2}\int_S |\, P_{x,y} \,|\, d\sigma_n$.

Appelons L_n l'intégrale attachée à σ_n : $L_n(f) = \int_S f\,d\sigma_n$.

b) $L(s^k) = \lim_n \int_S s^k \sigma_n(ds)$ existe pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Puisque $\int_S s^k \sigma_n(ds) = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\mu_n(t)$, nous allons établir que $\int_0^{2\pi} e^{ikt} d\mu_n(t)$ converge pour n infini, en distinguant k pair de k impair :

- $\int_0^{2\pi} e^{i(2k+1)t} d\mu_n(t) = \sum_1^{2n} e^{i(2k+1)t_k} m_k = 0$ car $\sum_1^{2n} e^{i(2k+1)(t_k+\pi)} = -\sum_1^{2n} e^{i(2k+1)t_k}$;
- $\int_0^{2\pi} e^{2ikt} d\mu_n(t) = 2\int_0^{\pi} e^{2ikt} d\mu_n(t) = (1-4k^2)\int_0^{\pi} N_n(e^{it}) e^{2ikt} dt$ d'après **3 a)** et **(5)**

Comme $N_n(e^{it}) \to N(e^{it})$ uniformément, $\lim_n \int_0^{\pi} e^{2ikt} N_n(e^{it})dt = \int_0^{\pi} e^{2ikt} N(e^{it})dt$

donc $\int_0^{2\pi} e^{ikt} d\mu_n(t)$ tend vers $(1-4k^2)\int_0^{\pi} N(e^{it}) e^{2ikt} dt$.

En conclusion, $L(s^{2k}) = (1-4k^2)\int_0^{\pi} N(e^{it}) e^{2ikt} dt$ et $L(s^{2k+1}) = 0$.

Remarque. Avec $k=0$, on retrouve la convergence de $\int_0^{\pi} 1\, d\mu_n$, établie en **6).**

c) $L_n(f)$ a une limite $L(f)$ pour toute f continue sur S.

D'abord $L(P)=\lim_n \int_S P(s)\sigma_n(ds)$ existe pour tout polynôme de Laurent P.

On se donne f continue sur S ; soit $\varepsilon>0$. On peut écrire

$$L_n(f)-L_m(f)=L_n(f)-L_n(P)+L_n(P)-L_m(P)+L_m(P)-L_m(f).$$

Il existe P de Laurent tel que $\max_S |f(s)-P(s)|\le\varepsilon$; une fois P choisi, à partir d'un rang N,

$$|L_n(P)-L_m(P)|\le\varepsilon \text{ si } m,n\ge N.$$

Ensuite, $|L_n(f)-L_n(P)|\le|f-P|\,\sigma_n(S)$, or $\sigma_n(S)=2\mu_n([0,\pi[)\le 2K$ (**6)**)

Au total, $|L_n(f)-L_m(f)|\le\varepsilon+2K\varepsilon$ dès que $m,n\ge N$: $L_n(f)$ est de Cauchy donc converge, sa limite étant notée $L(f)$.

c) Il existe une mesure symétrique σ telle que $L(f)=\int_S fd\sigma$ pour toute f continue

La limite simple L des L_n est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(S)$; comme S est compact, le théorème de représentation de Riez **[1]** assure qu'il existe σ positive et bornée sur S telle que

$$\lim_n \int_S f\,d\sigma_n=\int_S f\,d\sigma \text{ pour toute } f \text{ continue sur } S.$$

On dit que σ_n tend vers σ vaguement, ou étroitement, ou faiblement [9].

Symétrie de σ.

Établissons que $\sigma(-B)=\sigma(B)$ pour tout borélien B de S en introduisant la mesure σ' définie par $\sigma'(B)=\sigma(-B)$. Pour f continue sur S, posons $g(s)=f(-s)$: comme σ_n est symétrique, $L_n(f)=L_n(g)$ pour tout n et donc $L(f)=L(g)$, d'où $\int_S f(-x)d\sigma(x)=\int_S f(x)d\sigma(x)$.

Or $\int_S f(-x)d\sigma(x)=\int_S f(x)d\sigma'(x)$, aussi $\int_S fd\sigma=\int_S fd\sigma'$ pour toute f et $\sigma'=\sigma$ avec **3 b)**.

9) il existe µ telle que $\boxed{N(x+iy)=\int_0^{\pi}|x\sin t-y\cos t|\,d\mu(t)}$

Comme $|x\sin t-y\cos t|=|P_{x,y}(e^{it})|$ et que $|P_{x,y}|$ est continue sur S :

$$N(x+iy)=\lim_n N_n(x+iy)=\lim_n \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|P_{x,y}(e^{it})|\,d\mu_n(t)=\lim_n \frac{1}{2}\int_S |P_{x,y}(s)|\,d\sigma_n(s)=\frac{1}{2}\int_S |P_{x,y}(s)|\,d\sigma(s)$$

Soit µ la mesure sur $[0,2\pi[$ définie par $\mu=\sigma\circ(t\mapsto e^{it})$: on sait que

$$\int_{[0,2\pi[} f(e^{it})\,d\mu=\int_S f\,d\sigma$$

d'où $N(x+iy)=\frac{1}{2}\int_S |P_{x,y}(s)|\,d\sigma(s)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|P_{x,y}(e^{it})|\,d\mu(t)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|x\sin t-y\cos t|\,d\mu(t)$.

[9] Ces trois modes de convergence des mesures se confondent ici car S est compact.

Reste à voir que $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|x\sin t-y\cos t|\,d\mu(t)=\int_0^{\pi}|x\sin t-y\cos t|\,d\mu(t)$, ce qui équivaut à

$$\int_{\pi}^{2\pi}|x\sin t-y\cos t|\,d\mu(t)=\int_0^{\pi}|x\sin t-y\cos t|\,d\mu(t).$$

Comme σ est symétrique, $\mu(B+\pi)=\mu(B)$ pour tout borélien de $[0,\pi[$; $k:t\mapsto \pi+t$ est une homéomorphie de $[0,\pi[$ sur $[\pi,2\pi[$ et $\int_0^{\pi} f\,d\mu=\int_{\pi}^{2\pi}(f\circ k^{-1})d(\mu\circ k^{-1})$. Si f est de période π, ce qui est le cas de $t\mapsto|x\sin t-y\cos t|$, $f\circ k^{-1}=f$ et $\int_0^{\pi} f\,d\mu=\int_{\pi}^{2\pi} f\,d(\mu\circ k^{-1})$; enfin, comme $\mu\circ k^{-1}$ coïncide avec μ sur $[\pi,2\pi[$, $\int_0^{\pi} f\,d\mu=\int_{\pi}^{2\pi} f\,d\mu$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. La masse de µ est la limite des masses des μ_n car

$$\mu\left([0,2\pi[\right)=\sigma(S)=\lim\sigma_n(S)=\int_0^{\pi}N(e^{it})dt=\lim\mu_n\left([0,2\pi[\right)$$

mais j'ignore si μ_n tend vers µ .

10) Une application de la représentation intégrale

Nous allons prouver que le cercle unité pour une norme quelconque N du plan, noté S_N, possède une tangente en tout point *sauf sur un ensemble dénombrable de points* en lesquels il y aura deux demi-tangentes.

a) Paramétrisation de S_N

Si $z=re^{i\theta}\in S_N$, alors $N(z)=rN(e^{i\theta})=1$, donc $r=1/N(e^{i\theta})$: tout point M de S_N est donc paramétré par $\left(\frac{\cos\theta}{N(e^{i\theta})},\frac{\sin\theta}{N(e^{i\theta})}\right)$.

Pour alléger l'écriture, on posera $f(\theta)=N(e^{i\theta})=\int_0^{\pi}|\sin(t-\theta)|\,d\mu(t)$ et donc $r=1/f$.

b) f est de classe C^1 si µ est sans atome

Commençons par établir la dérivabilité à droite en tout $\theta\in]0,\pi[$.

Puisque $f(\theta)=\int_0^{\pi}|\sin(t-\theta)|\,d\mu(t)=\int_0^{\theta}\sin(\theta-t)d\mu(t)+\int_{\theta}^{\pi}\sin(t-\theta)d\mu(t)$

alors $f(\theta+h)=\int_0^{\theta+h}\sin(\theta+h-t)d\mu(t)+\int_{\theta+h}^{\pi}\sin(t-\theta-h)d\mu(t)$.

Pour $h>0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}f(\theta+h)-f(\theta)&=\int_0^{\theta}[\sin(\theta+h-t)-\sin(\theta-t)]d\mu(t)\\&+\int_{\theta}^{\pi}[\sin(t-\theta-h)-\sin(t-\theta)]d\mu(t)\\&+2\int_{\theta}^{\theta+h}\sin(\theta+h-t)d\mu(t).\end{aligned}$$

On divise par h et on fait tendre h vers zéro :
la première intégrale tend vers $\int_0^\theta \cos(\theta - t)d\mu(t)$ par convergence dominée (utiliser $|\sin u - \sin v| \leq |u - v|$) ;
la deuxième tend vers $-\int_\theta^\pi \cos(t-\theta)d\mu(t)$ par convergence dominée aussi ;
la troisième tend vers 0 car **μ n'a pas d'atome** : on a d'abord $0 \leq \theta + h - t \leq h$, donc
$0 \leq \frac{1}{h}\int_\theta^{\theta+h} \sin(\theta + h - t)d\mu(t) \leq \frac{1}{h}\int_\theta^{\theta+h} \sin(h)d\mu(t) = \frac{1}{h}\mathrm{sinh} \times \mu(\theta, \theta+h)$ et $\mu(\theta,\theta+h) \to 0$.

La dérivée à droite de f en θ est donc $\int_0^\theta \cos(\theta-t)d\mu(t) - \int_\theta^\pi \cos(t-\theta)d\mu(t)$.

La dérivée à gauche de f en $\theta \in]0,\pi[$ est la même puisque pour $h > 0$:

$$\begin{aligned} f(\theta-h) - f(\theta) &= \int_0^\theta [\sin(\theta-h-t) - \sin(\theta-t)]d\mu(t) \\ &+ \int_\theta^\pi [\sin(t-\theta+h) - \sin(t-\theta)]d\mu(t) \\ &- 2\int_{\theta-h}^\theta \sin(\theta-t-h)d\mu(t). \end{aligned}$$

Les deux cas particuliers $\theta = 0, \pi$ s'étudient de la même manière.

On a donc $f'(\theta) = \int_0^\theta \cos(\theta-t)d\mu(t) - \int_\theta^\pi \cos(t-\theta)d\mu(t)$ pour tout θ (on pourra vérifier avec la norme euclidienne) ; la continuité de f' est facile à établir.

c) Dérivabilité de f quand μ est discrète

Si μ est portée par $(t_n)_{n\geq 1}$, alors $\sum_{n=1}^\infty \mu(t_n) < +\infty$ et $f(\theta) = \sum_{n=1}^\infty |\sin(\theta - t_n)| \times \mu(t_n)$.
Chacune des fonctions $\theta \mapsto |\sin(\theta - t_n)|$ est dérivable à droite et à gauche et on vérifie sans peine que la dérivée à droite est continue à droite et la dérivée à gauche est continue à gauche.
Comme la dérivation terme à terme est légitimée par la convergence normale, f est dérivable à droite et à gauche, la dérivée à droite étant continue à droite, la dérivée à gauche étant continue à gauche.

d) Cas général

Rappelons d'abord pourquoi l'ensemble D des atomes d'une mesure est dénombrable : D est la réunion dénombrables des ensembles finis $D_n = \{t \in [0,\pi[: \mu(t) \geq 1/n\}$.
Pour tout borélien B de $[0,\pi[$ on a $\mu(B) = \mu(B \cap D) + \mu(B \cap \overline{D})$: aussi μ est la somme de deux mesures μ_1 et μ_2, μ_1 étant discrète et μ_2 sans atome.
Comme $f(\theta) = \int_0^\pi |\sin(t-\theta)|\,d\mu(t) = \int_0^\pi |\sin(t-\theta)|\,d\mu_1(t) + \int_0^\pi |\sin(t-\theta)|\,d\mu_2(t)$, f est la somme d'une fonction ayant en tout point des dérivées à droite et à gauche et d'une fonction $\mathcal{C}^1$.

Ainsi f possède en tout point des dérivées à droite et à gauche : *de ce fait, elle est dérivable sauf sur un ensemble au plus dénombrable* ; *de plus, sa dérivée à droite est continue à droite et sa dérivée à gauche est continue à gauche*.

e) La condition de concavité $1/r+(1/r)''\geq 0$

On suppose $r=1/f$ deux fois dérivable. Pour $h>0$:

$$\begin{aligned} f'(\theta+h)-f'(\theta) &= \int_0^\theta [\cos(\theta+h-t)-\cos(\theta-t)]d\mu(t) \\ &+\int_\theta^\pi [\cos(\theta-t)-\cos(\theta-t+h)]d\mu(t) \\ &+2\int_\theta^{\theta+h} \cos(\theta+h-t)d\mu(t). \end{aligned}$$

On en déduit facilement que $\dfrac{f'(\theta+h)-f'(\theta)}{h}$ a une limite si et seulement si $\dfrac{\mu(\theta,\theta+h)}{h}$ en a une ; même conclusion pour $\dfrac{f'(\theta-h)-f'(\theta)}{h}$ avec $\dfrac{\mu(\theta-h,\theta)}{h}$.

Si on appelle F_μ la fonction de répartition de µ , $F_\mu(\theta)=\mu([0,\theta])$, F_μ' existe donc partout et

$$f''(\theta)=-\int_0^\theta \sin(\theta-t)d\mu(t)+\int_\theta^\pi \sin(\theta-t)d\mu(t)+2F_\mu'(\theta).$$

Aussi $f''(\theta)=-f(\theta)+2F_\mu'(\theta)$ et $f+f''=2F_\mu'\geq 0$ car F_μ est croissante.

Comme $r=1/f$, on retrouve bien $1/r+(1/r)''\geq 0$.

11) Détermination de µ en fonction de N

Nous levons le voile sur la mesure µ en l'exprimant en fonction de la norme N.

a) Un cas particulier

Si f est de classe C^2, F_μ' est continue et µ est de densité F_μ'. On a donc $d\mu=\frac{1}{2}(f+f'')d\lambda$, d'où

$$N(e^{i\theta})=\frac{1}{2}\int_0^\pi |\sin(t-\theta)|\left(f(t)+f''(t)\right)dt$$

et $N(x+iy)=\frac{1}{2}\int_0^\pi |x\sin t-y\cos t|\left(f(t)+f''(t)\right)dt$.

b) Le cas général

Nous avons vu que si f est de classe C^2, F_μ' est continue et $f+f''=2F_\mu'$: en intégrant, il vient

$$\int_0^\theta f(u)\,du+f'(\theta)-f'(0)=2F_\mu(\theta).$$

Cette formule est encore vraie si f est seulement C^1, ou µ sans atome :

$\int_0^\theta f(u)du = \int_0^\theta \left(\int_0^\pi |\sin(u-t)|\, d\mu(t)\right) du = \int_0^\pi \left(\int_0^\theta |\sin(u-t)|\, du\right) d\mu(t)$, d'où

$$\int_0^\pi \left(\int_0^\theta |\sin(u-t)|\, du\right) d\mu(t) = \int_0^\theta \left(\int_0^\theta |\sin(u-t)|\, du\right) d\mu(t) + \int_\theta^\pi \left(\int_0^\theta |\sin(u-t)|\, du\right) d\mu(t)$$

$$= \int_0^\theta [2-\cos t-\cos(\theta-t)]\, d\mu(t) + \int_\theta^\pi [\cos(\theta-t)-\cos t]\, d\mu(t)$$

$$= 2F_\mu(\theta) - \int_0^\pi \cos t\, d\mu(t) - \int_0^\theta \cos(\theta-t)\, d\mu(t) + \int_\theta^\pi \cos(\theta-t)\, d\mu(t)$$

$$= 2F_\mu(\theta) - \int_0^\pi \cos t\, d\mu(t) - f'(\theta).$$

Comme $f'(0) = -\int_0^\pi \cos t\; d\mu(t)$, la vérification est terminée.

Quand μ a des atomes, f' n'existe pas partout, nous la remplaçons par la dérivée à droite f'_d.
On a vu que μ se décomposait en $\nu+\rho$, où ν est sans atome et ρ discrète : pour chaque atome t_n de μ, $\rho(t_n)=\mu(t_n)$ et alors $f(\theta)=g(\theta)+h(\theta)$ avec

$$g(\theta) = \int_0^\pi |\sin(t-\theta)|\, d\nu(t) \text{ et } h(\theta) = \sum_{n=1}^\infty |\sin(\theta-t_n)| \times \mu(t_n).$$

Par linéarité, $\int_0^\theta f(u)\, du + f_d'(\theta) = \int_0^\theta g(u)\, du + g'(\theta) + \int_0^\theta h(u)\, du + h_d'(\theta)$; on sait que $\int_0^\theta g(u)\, du + g'(\theta) = 2F_\nu(\theta) + g'(0)$. Reste à étudier $\int_0^\theta h(u)\, du + h_d'(\theta)$: si h se réduisait à un seul facteur $|\sin(\theta-t)| \times \mu(t)$, alors $\int_0^\theta h(u)\, du + h_d'(\theta) = \begin{cases} (-\cos t)\mu(t) \text{ si } t > \theta \\ (2-\cos t)\mu(t) \text{ si } t \le \theta \end{cases}$. On en déduit

$$\int_0^\theta h(u)\, du + h_d'(\theta) = \sum_{t_n \le \theta} (2-\cos t_n)\mu(t_n) - \sum_{t_n > \theta} \cos t_n . \mu(t_n) = 2F_\rho(\theta) - \sum_n \cos t_n . \mu(t_n).$$

Enfin, $\sum_n \cos t_n . \mu(t_n) = \int_0^\pi \cos t\; d\rho$ vaut exactement $-h_d'(0)$. On a donc

$$\int_0^\theta f(u)\, du + f_d'(\theta) = 2F_\mu(\theta) + f_d'(0).$$

μ est donc la mesure de fonction de répartition $\frac{1}{2}\left(\int_0^\theta f(u)\, du + f_d'(\theta) - f_d'(0)\right)$, $f(\theta) = N(e^{i\theta})$.

La masse de μ est $F(\pi) = \frac{1}{2}\int_0^\pi N(e^{i\theta})\, d\theta$.

Rappelons pour finir comment on calcule l'intégrale d'une fonction C^1 connaissant la fonction de répartition : $\int_a^b g\, dm = F_m(b)g'(b) - \int_a^b g'(t)F_m(t)\, dt$ (remplacer $g(x)$ par $g(a) + \int_a^x g'(t)dt$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gérard Letac, *Intégration et probabilités, Analyse de Fourier, Exercices corrigés,* Masson, 2e édition, 1982.

[2] Daniel Li, Théorème de représentation de Riesz :

http://li.perso.math.cnrs.fr/textes/Integration/RIESZ.pdf

On pourra aussi consulter W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, 3e édition, Dunod, Chapitre 2.

[3] Daniel Saada, *Tribus et probabilités sur les univers infinis*, 2e édition :

http://books.google.fr/books?id=jg-DAgAAQBAJ&pg=PA8&dq=daniel+saada&hl=fr&sa=X&ei=b7EoU--xFqeY1AWCsYDACg&ved=0CFEQ6AEwAQ#v=onepage&q=daniel%20saada&f=false