34 - FONCTIONS DE PREMIÈRE CLASSE DE BAIRE

www.daniel-saada.eu

Une fonction numérique f, définie sur un espace métrique (E,d), est dite de première classe (**de Baire**) quand l'image réciproque par f de tout ouvert de R est un F_σ, une réunion dénombrable de fermés ; l'image réciproque par f de tout fermé de R est alors un G_δ, une intersection dénombrable d'ouverts. Toute fonction continue est de première classe car dans un espace métrique tout ouvert est un F_σ et tout fermé est un G_δ [1]. La réciproque est fausse car la classe des F_σ est strictement plus vaste que les ouverts : $[0,1[$ n'est pas ouvert et est l'union des fermés $[0,1-1/n]$; de même, l'ensemble des irrationnels $R-\mathbb{Q}$ est un G_δ qui n'est pas ouvert.

Parmi les fonctions de première classe de R dans R qui ne sont pas (toujours) continues, citons

– les fonctions monotones,

– les fonctions dérivées,

dont l'importance n'est pas à souligner.

Le but essentiel de cet article est de prouver l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

f est de première classe

f est limite simple d'une suite de fonctions continues

Nous terminerons par un troisième exemple important de fonctions de première classe.
Avant cela, établissons que toute fonction monotone de R dans R est de première classe.
On sait que tout ouvert de R est union dénombrable disjointe d'intervalles (ouverts), or l'image réciproque d'un intervalle par une fonction monotone est un intervalle : comme tout intervalle est un F_σ, l'image réciproque de tout ouvert est un F_σ.

1) Une fonction limite simple de fonctions continues est de première classe.

Soit f_n une suite de fonctions continues qui convergent vers une fonction f.
Donnons-nous un fermé F de R : alors $f^{-1}(F)=\bigcap_n \bigcup_{p\geq n} f_p^{-1}(O_n)$ **[2, §** 11.6.3, **page** 178**]** ,

égalité ensembliste qui s'établit par double inclusion.
Comme chaque $f_p^{-1}(O_n)$ est un ouvert, il en est de même de la réunion sur p et donc $f^{-1}(F)$ est un G_δ. f est donc bien de première classe.

Exemples.
a) La dérivée d'une fonction dérivable f est la limite de la suite des fonctions continues $x\mapsto \dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$: toute dérivée est donc de première classe.

[1] Un fermé F est l'intersection dénombrable des ouverts O_n définis par $\{x\in E : d(x,F)<1/n\}$.

b) Si une fonction f de R^2 dans R est continue en chacune de ses deux variables, f est de première classe de Baire sur R^2 : en effet, f est la limite simple d'une suite (f_n) de fonctions *continues* sur R^2, à savoir $f_n(x,y)=2n\int_{x-1/n}^{x+1/n} f(u,y)du$.

(**Clément de Seguins Pazzis**, **RMS 123-4**, 2012-2013, **exercice d'Oral 233**.)

2) L'ensemble $\mathcal{R}_1$ des fonctions limites simples de fonctions continues est fermé pour la convergence uniforme

Soit f adhérente à $\mathcal{R}_1$ pour la norme de la convergence uniforme que nous noterons $\| \ \|$.
Pour tout $n \geq 1$, il existe $g_n \in \mathcal{R}_1$ telle que $\| f - g_n \| \leq 1/2^{n+1}$: la suite (g_n) convergeant vers f, on peut écrire $f = g_1 + \sum_1^\infty (g_{n+1} - g_n)$. En posant $f_1 = g_1$, $f_{n+1} = g_{n+1} - g_n$, on a $f = f_1 + \sum_2^\infty f_n$, avec f_n dans $\mathcal{R}_1$ et $\| f_n \| \leq 2^{-n}$ pour $n \geq 2$.

Chaque f_n est limite simple d'une suite $(\varphi_{n,p})_p$ de fonctions continues sur E : $f_n(x) = \lim_p \varphi_{n,p}(x)$.
Introduisons pour $n \geq 2$ la fonction continue $\phi_{n,p}$ [2] définie par

$$\phi_{n,p}(x) = \begin{cases} \varphi_{n,p}(x) \text{ si } \varphi_{n,p}(x) \in [-2^{-n}, 2^{-n}] \\ 2^{-n} \text{ si } \varphi_{n,p}(x) \geq 2^{-n} \\ -2^{-n} \text{ si } \varphi_{n,p}(x) \leq -2^{-n} \end{cases}.$$

Comme $\| f_n \| \leq 2^{-n}$, $f_n(x)$ est encore la limite de $\phi_{n,p}(x)$ quand p tend vers l'infini.

Comme $\| \phi_{n,p} \| \leq 2^{-n}$, on peut envisager $\phi_p(x) = \sum_{n=1}^\infty \phi_{n,p}(x)$, chaque ϕ_p étant *continue*.

Fixons maintenant x dans E : $f(x) = f_1(x) + \sum_2^\infty f_n(x)$ s'écrit pour tout p

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{n=2}^\infty \left(f_n(x) - \phi_{n,p}(x) \right) + \sum_{n=2}^\infty \phi_{n,p}(x) = f_1(x) + \sum_{n=2}^\infty \left(f_n(x) - \phi_{n,p}(x) \right) + \phi_p(x).$$

Il vient alors $| f(x) - f_1(x) - \phi_p(x) | \leq \sum_{n=2}^N \left| f_n(x) - \phi_{n,p}(x) \right| + \sum_{n=N+1}^\infty 2/2^n$; on fixe N pour que $\sum_{n=N+1}^\infty 2/2^n \leq \varepsilon$; une fois N fixé, il existe un rang p_0 au delà duquel $\sum_{n=2}^N \left| f_n(x) - \phi_{n,p}(x) \right| \leq \varepsilon$.
On en déduit que $f(x) = \lim_p \left(f_1(x) + \phi_p(x) \right)$ et donc que f est la limite simple, sur p, des fonctions continues $\varphi_{1,p} + \phi_p$: f est bien dans $\mathcal{R}_1$.

---

[2] $\phi_{n,p} = \min\left(2^{-n}, \max(-2^{-n}, \varphi_{n,p})\right)$.

3) Toute fonctions de première classe est limite simple d'une suite de fonctions continues

D'après **2)**, pour démontrer que $f \in \mathcal{R}_1$, il suffit donc de prouver que f est limite uniforme d'une suite de $\mathcal{R}_1$, ou encore que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{R}_1$ telle que $\| f - f_\varepsilon \| \leq \varepsilon$.

a) Les ambigus (de classe 1)

Une partie est dite ambiguë (sous-entendu de classe 1) si c'est à la fois un G_δ et un F_σ.

Dans un espace métrique, les ouverts et les fermés sont ambigus.

$R - \mathbb{Q}$ est un G_δ mais n'est pas un F_σ en vertu du théorème de Baire, R étant complet **[2, p. 44]**.

Règles de calcul sur l'ensemble $\mathcal{A}_1$ des ambigus.

$\mathcal{A}_1$ est stable par intersection, complémentaire, différence : soit A et B dans $\mathcal{A}_1$:

- $A \cap B$ est évidemment un G_δ, c'est aussi un F_σ car $\left(\bigcup F_n\right) \cap \left(\bigcup F'_m\right) = \bigcup \left(F_n \cap F'_m\right)$;
- le complémentaire $\overline{A}$ de A est aussi ambigu ;
- $A \cup B \in \mathcal{A}_1$ car $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Il en résulte que $\mathcal{A}_1$ est stable par différence puisque $A - B = A \cap \overline{B}$.

b) Un théorème de séparation pour deux G_δ disjoints

Rappelons que dans un espace métrique, on peut toujours séparer deux fermés disjoints F et G par deux ouverts disjoints. Pour ce faire, on utilise la fonctions continue $u(x) = \dfrac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)}$ qui vaut 0 sur F et 1 sur G : les ouverts $U = \{x \in E : u(x) < 1/2\}$ et $V = \{x \in E : u(x) > 1/2\}$ conviennent. On sait que U et V sont ambigus. De façon similaire :

Si A et B sont deux G_δ d'intersection vide, on peut les séparer par deux ambigus disjoints A' et B', A' contenant A et B' contenant B.

Posons $C = \overline{A}$ et $D = \overline{B}$: C et D sont deux F_σ et $E = C \cup D$.

Écrivons $C = \bigcup_1^\infty C_n$, $D = \bigcup_1^\infty D_n$, C_n et D_n fermés, et définissons par récurrence (U_n) et (V_n) par

$$U_1 = C_1 \ ; \ V_1 = D_1 - C_1 \ ; \ U_n = C_n - \bigcup_1^{n-1} V_k \ ; \ V_n = D_n - \bigcup_1^n U_n \ .$$

Soit $U = \bigcup_1^\infty U_n$ et $V = \bigcup_1^\infty V_n$: il est clair que $U \subset C$ et $V \subset D$.

Par construction, U_n ne rencontre pas $V_1, \ldots, V_{n-1}$ et V_n ne rencontre pas $U_1, \ldots, U_n$: il en résulte que $U_p \cap V_q = \varnothing$ pour tous p et q et donc que $U \cap V = \varnothing$.

Montrons maintenant que $E = U + V$. Pour cela, il suffit d'établir que C et D sont dans $U + V$.

Soit $x \in C$: si $x \in U$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, x est dans un des C_n et comme x

n'appartient pas à U_n, x appartient à $\bigcup_1^{n-1} V_k$, donc à V. On montre de même que D est inclus dans $U+V$. Ainsi, U et V forment une partition de E.

Montrons ensuite que U et V sont ambigus en montrant d'abord que les U_n et les V_n sont ambigus.
C'est vrai au rang 1 car U_1 est fermé donc ambigu et V_1 est la différence de deux ambigus. Supposons $U_1,...,U_{n-1},V_1,...,V_{n-1}$ ambigus. D'après les règles de calcul sur les ambigus, U_n et V_n sont ambigus. Donc les réunions dénombrables U et V sont deux F_σ ; comme elles sont complémentaires, U et V sont ambigus.

Enfin, posons $A'=\overline{U}$ et $B'=\overline{V}$: A' et B' sont ambigus, disjoints, $A\subset A'$ et $B\subset B'$.

c) Construction de f_ε

Soit (y_n) une graduation de R, indicée par $\mathbb{N}^*$, telle que pour tout réel t il existe n tel que $|t-y_n|\leq \varepsilon/2$. Par exemple, $y_1=0$, $y_{2n}=n\varepsilon$, $y_{2n+1}=-n\varepsilon$, $n\geq 1$.
Définissons $A_n=\{x\in E :|f(x)-y_n|\leq \varepsilon/2\}$ et $B_n=\{x\in E :|f(x)-y_n|\geq \varepsilon\}$.
Comme f est de première classe, A_n et B_n sont des G_δ, disjoints. Les A_n recouvrent E.
On sait qu'il existe C_n ambigu contenant A_n et ne rencontrant pas B_n ; les C_n recouvrent donc E également.

En posant $P_1=C_1$, $P_n=C_n-\bigcup_1^{n-1} P_k$, on construit une partition de E avec P_n ambigu.
C'est vrai au rang 1 ; supposons l'hypothèse vraie aux rangs $1,2,...,n-1$: alors P_n est ambigu.

On définit f_ε sur P_n par $f_\varepsilon=y_n$: $\|f-f_\varepsilon\|\leq\varepsilon$ car $x\in P_n$ signifie $x\in C_n$ et donc x n'est pas dans B_n.

d) $\boxed{f_\varepsilon\in\mathcal{R}_1}$

C'est la conséquence du lemme suivant :

E est un espace métrique, (P_n) une partition de E par des ensembles F_σ : toute fonction numérique g dont les restrictions aux P_n sont continues appartient à $\mathcal{R}_1$.

Pour tout n, on écrit P_n comme une réunion *croissante* de fermée : $P_n=\bigcup_p F_{n,p}$.

On pose $K_n=\bigcup_{i=1}^n F_{i,n}$: (K_n) est une suite croissante de fermés de réunion E.
La restriction de g à chaque K_n est encore continue, car K_n est une réunion *finie*.
Soit g_n un prolongement continu de cette restriction à E tout entier (Th d'Urysohn).
Il est immédiat que pour tout x de E, $g(x)=\lim g_n(x)$ puisque $g(x)=g_n(x)$ à partir d'un certain rang.
Notre fonction f_ε est constante donc continue sur chaque P_n, le lemme s'applique et $f_\varepsilon\in\mathcal{R}_1$.

Conséquence. Si l'espace métrique de départ E est *complet*, une fonction de première classe a des points de continuités, l'ensemble des points de continuité est même *dense* dans E **[2, page 239]**.
Il en résulte qu'une fonction partout discontinue n'est pas de première classe, comme $1_{\mathbb{Q}}$.

4) Une fonction dont l'ensemble des discontinuités est dénombrable est de première classe

Soit D l'ensemble au plus dénombrable des discontinuités de f sur E et U un ouvert de R.

Soit $x \in V - \overset{\circ}{V}$, où $\overset{\circ}{V}$ est l'intérieur de V : $u = f(x) \in U$; comme U est ouvert, il existe un ouvert W tel que $u \in W \subset U$. On a $x \in f^{-1}(W) \subset V$: il en résulte que $f^{-1}(W)$ n'est pas ouvert, sinon x serait dans $\overset{\circ}{V}$, et donc que f n'est pas continue en x.

V est donc la réunion de son intérieur, qui est un ouvert, et de points de discontinuités :
$V = \overset{\circ}{V} + V \cap D$, c'est donc un F_σ.
Aussi f est de première classe de Baire ; de ce fait, f est limite simple d'une suite de fonctions continues.

La réciproque est vraie :
Si pour tout ouvert U, $f^{-1}(U)$ est la réunion de son intérieur et d'un dénombrable, alors l'ensemble des points de discontinuités de f est au plus dénombrable.

En effet, l'ensemble des points de discontinuité de f est $\mathcal{D}(f) = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} \left(f^{-1}(U) - \overset{0}{f^{-1}(U)} \right)$

où $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de R et $\overset{0}{f^{-1}(U)}$ désigne l'intérieur de $f^{-1}(U)$.
La raison est la suivante : f est discontinue en x si et seulement si il existe un voisinage V de $f(x)$ tel que $f^{-1}(V)$ ne soit pas un voisinage de x. Comme on peut choisir $\mathcal{B}$ dénombrable, par exemple l'ensemble des intervalles à extrémités rationnelles, $\mathcal{D}(f)$ est dénombrable.

Parmi les fonctions de R dans R dont l'ensemble des discontinuités est dénombrable, citons[3]:

- les fonctions monotones,
- les fonctions réglées,
- les fonctions continues à droite, ou à gauche.

Toutes ces fonctions sont donc limites simples de fonctions continues. Pour une fonction monotone ou réglée, ce résultat est remarquable et on serait bien en peine d'expliciter la suite de fonctions continues dont elles sont la limite. Il va autrement pour les fonctions continues à droite ou à gauche, c'est l'objet du paragraphe suivant.

5) Une suite explicite (f_n) de fonctions continues dont la limite est une fonction f de R dans R continue à droite ou à gauche en tout point.

[3] http://www.daniel-saada.eu/fichiers/33-Fonctions-continues-presque-partout.pdf , § 4.

Nous faisons l'explicitation pour f continue à droite, nous indiquerons les modifications à faire pour f continue à gauche.

a) Si f est bornée sur tout segment[4] de R, $f_n(x)=n\int_x^{x+1/n} f(t)dt$ convient.

Prouvons d'abord que f est intégrable sur tout segment. Comme l'ensemble de ses discontinuités est dénombrable, il est de mesure nulle : f est donc intégrable au sens de Riemann (c'est la **caractérisation de Lebesgue** des fonctions Riemann-intégrables).

- f_n est continue sur R

Il suffit de démontrer que pour $a>0$ fixé, la fonction $g(x)=\int_x^{x+a} f(t)dt$ est continue en tout x.

Soit (x_n) une suite de limite x : $g(x_n)-g(x)=\int_{x_n}^{x} f(t)dt+\int_{x+a}^{x_n+a} f(t)dt$; si M désigne un majorant de f sur $[x-1,x+1+a]$, $|g(x_n)-g(x)|\le 2M|x_n-x|$ à partir d'un certain rang, et donc $g(x_n)\to g(x)$. Toutes les f_n sont donc continues.

- $f_n(x)\to f(x)$

Comme $f(x)=n\int_x^{x+1/n} f(x)dt$, $|f_n(x)-f(x)|\le n\int_x^{x+1/n}|f(t)-f(x)|dt$ et la continuité à droite de f en x assure que $n\int_x^{x+1/n}|f(t)-f(x)|dt\to 0$ quand n tend vers l'infini.

b) On ne suppose plus f bornée sur tout segment de R

Soit φ un homéomorphisme de R sur $]-1,1[$, par exemple $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$: $\varphi\circ f$ reste continue à droite et est borné. On a donc $(\varphi\circ f)(x)=\lim n\int_x^{x+1/n}(\varphi\circ f)(t)dt$, d'où

$$f(x)=\lim \varphi^{-1}\left(n\int_x^{x+1/n}(\varphi\circ f)(t)dt\right),\text{ avec } \varphi^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}.$$

Si f est continue à gauche, prendre $f_n(x)=n\int_{x-1/n}^{x} f(t)dt$ quand f est bornée sur tout segment, et composer par φ dans le cas contraire.

Application aux Probabilités

Toute fonction de répartition F est limite d'une suite de fonctions de répartition *continues*.

En effet, F est continue à droite et bornée donc limite des $F_n(x)=n\int_x^{x+1/n}F(t)dt$.

Il reste à vérifier que $F_n(x)=n\int_x^{x+1/n}F(t)dt$ est une fonction de répartition, ce qui est aisé.

Le lecteur vérifiera que F_n est la fonction de répartition de la variable aléatoire $X_n=X-Z/n$, où X est de fonction de répartition F et Z uniforme sur $[0,1]$ et indépendante de X.

---

4 La fonction définie par $f(x)=-1/x$ sur $]-\infty,0[$ et $f(x)=0$ sur R^+ est continue à droite mais n'est pas bornée sur $[-1,0]$; en revanche, f est bornée sur tout segment si elle est monotone.

Comme F_n est continue partout, X_n est diffuse :

Toute variable aléatoire réelle est limite en loi d'une suite de variables aléatoires diffuses.

Remarque. Pour toute variable Z bornée, $X_n = X - Z/n$ converge simplement, où sûrement, vers X, et donc X_n converge en loi vers X. On sait alors que $F_n(x) \to F(x)$ si F est continue en x, F_n désignant la fonction de répartition de $X - Z/n$. Le choix de Z uniforme et indépendante de X a entraîné la convergence de $F_n(x)$ vers $F(x)$ quand F est discontinue en x.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Choquet, *Outils topologiques et métriques de l'Analyse mathématique,* CDU, 1969.

[2] D. Saada, *Tribus et Probabilités sur les univers infini,* consultable partiellement sur
http://books.google.fr/books?id=kq69nXaoV-AC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false