31 - PRODUITS INFINIS D'ESPACES PROBABILISABLES

www.daniel-saada.eu

Les univers Ω_i considérés, non réduits à un point, sont munis chacun d'une tribu $\mathcal{T}_i$, i décrivant un ensemble I ; pour chaque indice i, on suppose définie sur l'espace probabilisable $(\Omega_i, \mathcal{T}_i)$ une probabilité p_i. Il est bien connu que lorsque I est fini, il existe sur $\left(\prod_{i\in I}\Omega_i, \underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i\right)$ une seule probabilité P telle que $P(T_1\times\ldots\times T_n)=\prod_1^n p_i(T_i)$, chaque T_i étant dans la tribu $\mathcal{T}_i$ et n désignant le cardinal de I.

Le but de cette note est d'exposer la généralisation cet important résultat à I infini.

Notations. Rappelons que $C = A + B$ remplace $C = A\cup B$ quand A et B sont *disjoints*. L'hypothèse du continu est admise : si $card\ E > card\ \mathbb{N}$, alors $card\ E \geq card\ R = \mathfrak{c}$.

A - Tribu produit sur $\prod_{i\in I}(\Omega_i, \mathcal{T}_i)$

La tribu produit $\mathcal{T}$ sur $\prod_{i\in I}\Omega_i$ est par définition la tribu engendrée par les événements $E(j,T_j)$ qui s'écrivent $\prod_{i\in I}T_i$ avec $T_i=\Omega_i$ *pour tout* i *sauf pour un indice* j pour lequel T_j est un élément *quelconque* de la tribu $\mathcal{T}_j$:

$$E(j,T_j)=\Omega_1\times\Omega_2\times\ldots\Omega_i\times T_j\times\Omega_k\times\ldots\times\Omega_s\times\ldots$$

$E(j,T_j)$ est donc un élément de $\prod_{i\in I}\mathcal{T}_i$.

On note encore $\mathcal{T}=\underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i$ et on dit que $\left(\prod_{i\in I}\Omega_i, \underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i\right)$ est le produit des espaces $\prod_{i\in I}(\Omega_i, \mathcal{T}_i)$.

Si pour un certain j une famille de parties F_j engendre la tribu $\mathcal{T}_j$, alors on peut remplacer $E(j,T_j)$ par $E(j,F_j)$.

Si (J,K) est une partition de I, alors $\left(\underset{J}{\otimes}\mathcal{T}_j\right)\otimes\left(\underset{K}{\otimes}\mathcal{T}_k\right)=\underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i$ **([2], p. 75)** en particulier $\left(\underset{i\neq j}{\otimes}\mathcal{T}_i\right)\otimes\mathcal{T}_j=\underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i$ pour tout j. Si $\prod_I A_i\in\underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i$, alors on peut écrire $\left(\prod_{i\neq j}A_i\right)\times A_j\in\left(\underset{i\neq j}{\otimes}\mathcal{T}_i\right)\otimes\mathcal{T}_j$ et on sait alors **([3], p. 209-210)** que $A_j\in\mathcal{T}_j$: il en résulte que $\prod_I A_i\in\underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i$ implique $A_i\in\mathcal{T}_i$ pour tout i de I et que $\prod_I A_i\notin\underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i$ si l'un des A_i n'est pas dans sa tribu $\mathcal{T}_i$.

Lorsque I est fini, $\mathcal{T}$ est engendrée aussi par la famille plus vaste des produits $T_1\times T_2\times\ldots\times T_n$ de $\prod_{i\in I}\mathcal{T}_i$. Lorsque I est infini dénombrable, $\mathcal{T}$ est engendrée par les produits $\prod_I T_i$ de $\prod_I\mathcal{T}_i$. Dans ces deux cas :

- $\mathcal{T}=\underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i$ est la tribu engendrée par le produit cartésien des tribus $\prod_{i\in I}\mathcal{T}_i$;
- les singletons de $\prod_{i\in I}\Omega_i$ appartiennt à $\mathcal{T}$ si chaque $\mathcal{T}_i$ contient les singletons de Ω_i.

Si X_i est l'application coordonnée de $\prod_{i\in I}\Omega_i$ dans Ω_i, définie par $(\omega_i)_{i\in I}\mapsto\omega_i$, alors

$$E(j,T)=\left\{\omega\in\Omega : X_j(\omega)\in T\right\}=X_j^{-1}(T).$$

Aussi, $\mathcal{T}$ est la plus petite tribu qui rend mesurables toutes les applications coordonnées X_i.

Pour j fixé, l'ensemble des $E(j,T)$, obtenu quand T varie dans $\mathcal{T}_j$, est la tribu réciproque $X_j^{-1}(\mathcal{T}_j)$: $\mathcal{T}$ est donc aussi la tribu engendrée par la réunion des tribus $X_j^{-1}(\mathcal{T}_j)$ quand j décrit I.

Pour K inclus dans I, soit π_K la projection de $\prod_{i\in I}\Omega_i$ sur $\prod_{k\in K}\Omega_k$ définie par $(\omega_i)_{i\in I}\mapsto(\omega_k)_{k\in K}$ et $\mathcal{T}_K$ la tribu réciproque $\pi_K^{-1}\left(\underset{K}{\otimes}T_k\right)$: si K est inclus dans L, il est évident que $\mathcal{T}_K$ est incluse dans $\mathcal{T}_K$. De ce fait :

– pour I infini, la réunion des tribus $\mathcal{T}_K$ obtenue quand K parcourt les parties finies de I est une algèbre qui engendre $\underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i$.

– pour I non dénombrable, la réunion des tribus $\mathcal{T}_L$, obtenue quand L parcourt les parties dénombrables de I, est une tribu égale à $\underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i$.

Dans ce dernier cas, si A est dans $\mathcal{T}$, il existe L dénombrable telle que $A\in\mathcal{T}_L$. On en déduit :

– le cardinal de A est au moins $2^{\mathfrak{c}}$, puisque $card\,\Omega_i\geq 2$ et $card\,I\geq\mathfrak{c}$,

– il n'y a pas de singleton dans la tribu produit,

– A ne dépend que d'un nombre dénombrable de coordonnées,

– $\prod_I A_i\notin\mathcal{T}$ si $A_i\neq\Omega_i$ pour tout i.

B - Probabilité sur l'espace $\left(\prod_{i\in I}\Omega_i,\underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i\right)$

Pour simplifier l'exposé, on impose $(\Omega_i,\mathcal{T}_i)=(\Omega,\mathcal{T})$ pour tout i de I et on se donne une probabilité p sur $(\Omega,\mathcal{T})$.

On veut définir une probabilité P sur $\left(\Omega^I,\Gamma=\underset{I}{\otimes}\mathcal{T}_i\right)$ sous les conditions suivantes :

– pour tout j de I et tout T de la tribu T_j, $P(E(j,T))=p(T)$;

– pour tout J fini dans I, $P\left(\bigcap_J E(j,T_j)\right)=\prod_J p(T_j)$. $P(\varnothing)=0$?

On postule donc l'indépendance des $E(j,T)$, ou encore l'indépendance des fonctions coordonnées.

Les intersections *finies* de $E(j,T_j)$, qui s'appellent des pavés, forment une semi-algèbre $\mathcal{S}$ qui engendre Γ puisque $\mathcal{S}$ est incluse dans $\mathcal{T}$ et contient tous les $E(j,T_j)$. Les réunions *finies disjointes* de ces intersections forment une algèbre $\mathcal{A}$ qui engendre évidemment la tribu produit Γ **([3], p. 96-97)**.

Pour que P, définie sur $\mathcal{S}$, se prolonge en une probabilité sur la tribu produit Γ, qui est engendrée par $\mathcal{S}$, il faut et il suffit que P soit σ-additive sur $\mathcal{S}$ **([3],90-94)** ; ce prolongement est alors unique. Nous réduisons cette condition dans le paragraphe qui suit.

1) Si P est additive sur $\mathcal{S}$, P est σ-additive sur $\mathcal{S}$

a) *P se prolonge additivement à l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par $\mathcal{S}$* **([3], 97-98)**

On étend P à l'algèbre en posant, si $A=\sum_1^n S_i$, $P(A)=\sum_1^n P(S_i)$, mais il faut vérifier que $P(A)$ ne dépend pas de la représentation choisie pour A : $\sum_I S_i=\sum_J S_j$ doit donc impliquer $\sum_I P(S_i)=\sum_J P(S_j)$ pour I et J parties finies de $\mathbb{N}$. Or ceci résulte de ce que $S_i=\sum_J(S_i\cap S_j)$ et donc $P(S_i)=\sum_J P(S_i\cap S_j)$, d'où

$$\sum_i P(S_i)=\sum_i\sum_j P(S_i\cap S_j)\text{ ; de même, }\sum_j P(S_j)=\sum_j\sum_i P(S_j\cap S_i).$$

On a donc $\sum_i P(S_i)=\sum_j P(S_j)=\sum_{i,j}P(S_j\cap S_i)$.

On prouve maintenant l'additivité de P sur l'algèbre : $P\left(\sum_1^N A_n\right)=\sum_1^N P(A_n)$.

$A=\sum_1^N A_n$ et chaque A_n sont réunions finies disjointes d'événements de $\mathcal{S}$: $A=\sum_I S_i$ et $A_n=\sum_{k\in K_n} S_{n,k}$,

I et les K_n étant des parties finies de $\mathbb{N}$. D'abord, pour tout n fixé :

$$P(A_n)=\sum_{k\in K_n} P(S_{n,k})=\sum_{K_n}\sum_I P(S_{n,k}\cap S_i)=\sum_I P(A_n\cap S_i)$$

ce qui est un premier pas vers l'additivité sur $\mathcal{A}$.

Ensuite, comme S_i se décompose en $\sum_{n=1}^N (S_i\cap A_n)=\sum_{n=1}^N\sum_{k\in K_n}(S_i\cap S_{n,k})$, alors par additivité sur $\mathcal{S}$:

$$P(S_i)=\sum_n\sum_{K_n} P(S_i\cap S_{n,k})=\sum_1^N P(S_i\cap A_n).$$

Enfin, $P(A)=\sum_I P(S_i)=\sum_I\sum_n P(S_i\cap A_n)=\sum_n\sum_I P(S_i\cap A_n)=\sum_n P(A_n)$.

b) $P(S_n)\to 0$ *pour toute suite décroissante* (S_n) *d'événements de* $\mathcal{S}$ *et d'intersection vide*.

Chaque S_n étant un produit $\prod_I A_{n,i}$, $\bigcap_n S_n$ ne peut être vide que s'il existe i_0 tel que $\bigcap_n A_{n,i_0}$ est vide.

p étant une probabilité sur Ω et la suite $n\mapsto A_{n,i_0}$ étant décroissante, $\lim_n p(A_{n,i_0})=0$; comme $P(S_n)\le p(A_{n,i_0})$ par construction de P , $P(S_n)\to 0$.

c) $P(A_n)\to 0$ *pour toute suite décroissante* (A_n) *d'événements de* $\mathcal{A}$ *et d'intersection vide*.

Par définition de $\mathcal{A}$, A_1 est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{S}$: $A_1=S_{1,1}+\dots+S_{1,r}$.

Comme A_2 est inclus dans A_1 , $A_2=S_{2,1}+\dots+S_{2,r}$ avec $S_{2,i}\subset S_{1,i}$ pour i allant de 1 à r .

De même, $A_n=S_{n,1}+\dots+S_{n,r}$, les r suites $(S_{n,i})_n$ étant décroissantes.

Comme l'intersection des A_n est vide, il en est de même des r intersections $\bigcap_n S_{n,i}$.

Par hypothèse, $\lim_n P(S_{n,i})=0$ pour i allant de 1 à r , et donc $P(A_n)=P(S_{n,1})+\dots+P(S_{n,r})\to 0$.

d) P *est σ-additive sur* $\mathcal{A}$ *, et donc sur* $\mathcal{S}$ **([3], 34)**

Soit A dans l'algèbre telle que $A=\sum_1^\infty A_n$: A est la réunion croissante des $B_n=\sum_1^n A_i$ et donc $\overline{A}$ est l'intersection décroissante des $\overline{B_n}$, d'où $\bigcap_n (A\cap\overline{B_n})=\varnothing$, chaque $A\cap\overline{B_n}$ étant dans l'algèbre.

Par hypothèse, $P(A\cap\overline{B_n})$ tend vers 0 ; comme A est la réunion disjointe de $A\cap\overline{B_n}$ et de B_n ,

$P(A)=P(B_n)+P(A\cap\overline{B_n})$ et donc $P(A)$ est la limite des $P(B_n)$. Enfin, puisque $P(B_n)=\sum_1^n P(A_i)$

on a bien $P(A)=\sum_1^\infty P(A_n)$.

2) P **est additive sur** $\mathcal{S}$

La démonstration utilise l'intégrale des fonction étagées ; pour la rendre plus lisible, je n'utilise pas de doubles indices :

a) Si $S=S_1+\dots+S_N$, alors $1_S=1_{S_1}+\dots+1_{S_N}$.

b) Il existe une partie finie J de I telle que $S=\prod_J A_j\times\Omega^{I-J}$, $S_1=\prod_J B_j\times\Omega^{I-J}$, $S_N=\prod_J Z_j\times\Omega^{I-J}$.

c) J'assimile J à $\{1,2,\dots,r\}$: $1_S(x_1,\dots,x_r)=1_{A_1}(x_1)\times\dots\times 1_{A_r}(x_r)=1_{B_1}(x_1)\times\dots\times 1_{B_r}(x_r)+\dots+1_{Z_1}(x_1)\times\dots\times 1_{Z_r}(x_r)$.

d) En intégrant sur x_r , il vient : $1_{A_1}(x_1)\times\dots\times p(A_r)=1_{B_1}(x_1)\times\dots\times p(B_r)+\dots+1_{Z_1}(x_1)\times\dots\times p(Z_r)$.

e) Par intégrations successives, on arrive à $p(A_1)\times\ldots\times p(A_r)=p(B_1)\times\ldots\times p(B_r)+\ldots+p(Z_1)\times\ldots\times p(Z_r)$ ce qui prouve l'additivité de P sur $\mathcal{S}$.

3) $P\left(\prod_I A_i\right)=\prod_I p(A_i)$ quand $\prod_I A_i\in\Gamma$.

On sait que l'ensemble L des indices i pour lesquels $A_i\neq\Omega$ est au plus dénombrable et donc, comme $p(\Omega)=1$, $\prod_I p(A_i)=\prod_L p(A_l)$: *c'est le sens qu'il faut donner* à $P\left(\prod_I A_i\right)=\prod_I p(A_i)$. Quand L est fini, l'égalité a lieu par construction de P. Quand $L=(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dénombrable, c'est vrai par passage à la limite : $\prod_L A_l$ est une intersection dénombrable de $E_n=E(l_n,A_n)$ et donc

$$P\left(\prod_L A_l\right)=P\left(\bigcap_0^\infty E_n\right)=\lim_N P\left(\bigcap_0^N E_n\right)=\lim_N \prod_0^N P(E_n)=\prod_0^\infty P(E_n)=\prod_L p(A_l)$$

car la suite $N\mapsto\prod_0^N P(E_n)$ est convergente puisque décroissante et positive.

4) Une propriété d'approximation en mesure ([3], 95)

Comme la tribu produit Γ est engendrée par l'algèbre $\mathcal{A}$, pour tout événement T de Γ, pour tout $\varepsilon>0$, il existe A dans $\mathcal{A}$ tel que $P(T\Delta A)\leq\varepsilon$ et donc $|P(T)-P(A)|\leq\varepsilon$.

C - EXEMPLES

1) Ω *est fini et* I *est dénombrable*

On munit Ω, de cardinal $r\geq 2$, de la tribu $\mathcal{T}=\mathcal{P}(\Omega)$ et $(\Omega,\mathcal{T})$ de la probabilité p uniforme ; pour la clarté, on prend $I=\mathbb{N}^*$. Quand $r=2$, on modélise donc les lancers infinis (mais dénombrables) d'une pièce équilibrée ; pour $r=6$, on modélise les lancers infinis d'un dé équilibré. La tribu produit Γ est engendrée par les produits $\prod_1^\infty A_n$, où les A_n sont des sous-ensembles quelconques de Ω ; en particulier, Γ contient tous les singletons de $\Omega^{\mathbb{N}^*}$.

Il existe une probabilité P sur $(\Omega^{\mathbb{N}^*},\Gamma)$ et une seule telle que, pour toute partie J finie ou infinie de $\mathbb{N}^*$,

$$P\left(\bigcap_J E(j,T_j)\right)=\prod_J p(T_j)=\frac{1}{r^J}\prod_J card(T_j)\ .$$

De plus, P sera diffuse, car pour tout singleton $\{\omega\}$ de $\Omega^{\mathbb{N}^*}$, $P(\{\omega\})=\lim_n\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$: un théorème d'Ulam **([3], chap. 3)** assure alors que Γ est une sous-tribu stricte de l'univers Ω^I, bien qu'elles soient de même cardinal, à savoir $\mathfrak{c}$.

Dans le cas Ω *fini, la σ-additivité de* P *a une origine purement ensembliste*. Soit (S_n) une suite décroissante de pavés *non vides* de la semi-algèbre engendrée par les $E(j,T)$: $S_n=\prod_{k\in\mathbb{N}}A_{n,k}$, où $A_{n,k}$ est un sous-ensemble de Ω (presque toujours égal à Ω mais ce fait ne sera pas exploité).

Pour tout k, la suite $n\mapsto A_{n,k}$ est décroissante : comme Ω est *fini*, $\bigcap_n A_{n,k}$ est non vide[1] pour tout k et donc $\bigcap_n S_n\neq\varnothing$. Il en résulte que si $\bigcap_n S_n=\varnothing$, alors l'un des S_n est vide et donc S_n est vide à partir d'un certain rang. C'est pourquoi $P(S_n)$ tend vers 0 et que P est σ-additive sur la semi-algèbre et donc sur la tribu produit.

---

[1] Une intersection dénombrable d'ensembles infinis décroissants peut être vide : $\bigcap_n]0,1/n[=\varnothing$.

Rappelons pour clore cet exemple l'énoncé de la loi forte des grands nombres : l'ensemble E des suites $\omega = (\omega_n)$ de $\Omega^{\mathbb{N}^*}$ telles que $\frac{1}{n}\sum_1^n \omega_i \to \frac{1}{r}$ appartient à la tribu produit et $P(E) = 1$.

2) L'espace produit $\Omega = [0,1]^{\mathbb{N}}$

On lisait dans la composition d'Analyse de l'Agrégation interne 2005 :

On appelle Ω l'ensemble des suites de nombres réels appartenant à $[0, 1]$.

Étant donnés un entier naturel n et deux suites finies de nombres réels $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ vérifiant pour tout j les inégalités $0 \leqslant a_j \leqslant b_j \leqslant 1$, on désigne par $K_{a,b}$ le *pavé* $K_{a,b} = \{x \in \mathbf{R}^{n+1},\ \forall j,\ a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$

Le volume de $K_{a,b}$ est par définition le réel $v(K_{a,b}) = \prod_{j=0}^{n}(b_j - a_j)$.

On associe à K la partie Ω_K de Ω définie par

$$\Omega_K = \{x = (x_k)_{k\geqslant 0},\quad (x_0, x_1, \dots, x_n) \in K\}.$$

On admettra qu'il existe sur Ω une tribu contenant tous les Ω_K et sur cette tribu $\mathscr{B}$ une probabilité P telle que $P(\Omega_K) = v(K)$ pour tout pavé K.

La tribu choisie sur l'univers initial $[0,1]$ est la tribu des boréliens de $[0,1]$, qui est l'intersection des boréliens de R avec $[0,1]$; p est la probabilité uniforme sur $[0,1]$ et $I = \mathbb{N}$.
La tribu produit est engendrée par les produits $B \times [0,1]^{\mathbb{N}-1}$ et on peut remplacer le borélien B par un intervalle car les intervalles engendrent les boréliens : chaque Ω_K est une intersection finie d'événements élémentaires.
$P(\Omega_K) = v(K)$ par construction de P car la probabilité d'un intervalle est sa longueur, P se prolongeant à la tribu produit qui contient tous les Ω_K.

3) $\Omega = \{0,1\}$ et $I = R$

La tribu choisie sur Ω est $\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$; on prend p uniforme sur $\{0,1\}$.

La tribu produit de $\{0,1\}^R$ est la tribu engendrée par les événements P_i et F_i, i décrivant $I = R$:

$$P_i = \left\{(x_i) \in \{0,1\}^I : x_i = 1\right\},\ F_i = \left\{(x_i) \in \{0,1\}^I : x_i = 0\right\}$$

tous de probabilité $1/2$.
Engendrée par une famille de cardinal $\mathfrak{c}$, la tribu produit Γ est de cardinal $\mathfrak{c}$ **([3], 124)** bien loin donc de l'univers produit. Rappelons que Γ ne contient aucun singleton de $\{0,1\}^R$; de plus, cette tribu est sans atome :

http://www.daniel-saada.eu/Notes/Tribus_sans_atomes.pdf

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Foata et A. Fuchs, *Calcul des probabilités*, Masson, 1996.

[2] J. Neveu, Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités, Masson, 1964.

[3] Daniel Saada, *Tribus et Probabilités sur les univers infinis*, consultable partiellement sur http://books.google.fr/books?id=kq69nXaoV-AC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false .