30 - Un complément à l'approximation normale

www.daniel-saada.eu

par Alain Rémondière

Dans toute la suite, X désigne une variable aléatoire réelle de densité f et (X_n) une suite de variables indépendantes de même loi que X. On posera $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n X_k$, la variable aléatoire Y_n ayant comme X une densité, qui sera notée f_n.

Si X a une moyenne m et une variance $V = \sigma^2$, on sait que Y_n converge en loi vers une loi normale N de moyenne m, d'écart-type σ et de densité $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$. Le but de cette note est d'établir, sous des conditions que vérifient presque toutes les lois usuelles à variance :

- la convergence uniforme des densités f_n vers la densité φ (ce qui expliquera la convergence en loi, uniforme également, de Y_n vers N) ;
- $\forall p \geq 1$, il existe n_0 au delà duquel f_n est de classe C^p et $f_n^{(p)} \to \varphi^{(p)}$ uniformément sur R.

Dans la partie **A**, on rappelle les propriétés de la fonction dite caractéristique de X, définie sur R par $t \mapsto E\left[e^{itX}\right] = \int_R e^{itx} f(x)dx$. Pour alléger les notations, nous poserons $E\left[e^{itX}\right] = \hat{f}(t)$, bien qu'en Analyse la transformée de Fourier $\hat{f}$ soit plutôt définie par $\hat{f}(x) = \int_R e^{-itx} f(t)dt$: cette distorsion n'a que peu d'importance.

Dans la partie **B**, on démontre les convergences uniformes annoncées quand X est centrée et réduite, ce qui suffira à établir le théorème dans toute sa généralité.

Dans la partie **C**, on donne une condition suffisante, vérifiée par les lois usuelles, pour que les convergences uniformes aient lieu. Un exemple clôt l'article.

Partie A : propriétés de la transformée de Fourier $\hat{f}(x) = \int_R e^{itx} f(t)dt$

On rappelle que f est positive et intégrable, avec $\int_R f(x)dx = 1$: aussi $\hat{f}(0) = 1$.

1) $\hat{f}$ est continue sur R et de limite nulle aux deux infinis

Ces deux propriétés sont fort classiques.

2) La formule d'inversion de Fourier

Si $\widehat{f}$ est intégrable sur R, alors $\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-itx}\widehat{f}(t)dt = f(x)$ *presque partout* ; en d'autres termes, $\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-itx}\widehat{f}(t)dt$ est une densité de X. Quand la densité f est continue, l'égalité a lieu partout car deux fonctions continues égales presque partout sont égales.

3) Pour x non nul, $|\widehat{f}(x)| < 1 = \widehat{f}(0)$

Par définition, $\left|\widehat{f}(x)\right|^2 = \left(\int_R \cos(tx)f(t)dt\right)^2 + \left(\int_R \sin(tx)f(t)dt\right)^2$.

Comme f est positive, $\left(\int_R \cos(tx)f(t)dt\right)^2 < \left(\int_R \cos^2(tx)f(t)dt\right)\left(\int_R f(t)dt\right)$ pour tout x non nul, car les fonctions $t \mapsto \sqrt{f(t)}$ et $t \mapsto \cos(tx)\sqrt{f(t)}$ ne sont pas proportionnelles.

De même, $\left(\int_R \sin(tx)f(t)dt\right)^2 < \left(\int_R \sin^2(tx)f(t)dt\right)\left(\int_R f(t)dt\right)$, et donc

$$\left|\widehat{f}(x)\right|^2 < \left(\int_R f(t)dt\right)^2 = \left|\widehat{f}(0)\right|^2.$$

4) pour tout $a > 0$, il existe $\rho = \rho(a) < 1$ tel que $|x| \geq a$ implique $|\widehat{f}(x)| \leq \rho(a)$.

On peut raisonner par l'absurde, en supposant qu'il existe une suite de réels (u_n) telle que $|u_n| \geq a$ et $|\widehat{f}(u_n)| \geq 1 - 1/n$. Comme $\widehat{f}$ est de limite nulle aux deux infinis, (u_n) est bornée. On peut donc en extraire une sous-suite convergente, de limite u. On aurait alors $|u| \geq a$ et $|\widehat{f}(u)| \geq 1$, ce qui est impossible en vertu de **3)**.

5) $\widehat{f_n}(x) = \left(\widehat{f}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$

a) Si g_n est la densité de $S_n = \sum_1^n X_k$, alors $f_n(x) = \sqrt{n}\,g_n(x\sqrt{n})$ (car $p(Y_n \leq x) = p(S_n \leq x\sqrt{n})$) et alors $\widehat{f_n}(x) = \int_R e^{itx}\sqrt{n}\,g_n(t\sqrt{n})dt = \int_R e^{itx/\sqrt{n}} g_n(t)dt = \widehat{g_n}(x/\sqrt{n})$.

b) Comme $e^{itS_n} = \prod_{k=1}^n e^{itX_k}$, l'indépendance des X_i donne $E[e^{itS_n}] = \left(E[e^{itX}]\right)^n$. On en déduit $\widehat{g_n} = (\widehat{f})^n$ et la formule annoncée.

Partie B : on suppose X centrée et réduite et $|\widehat{f}(x)| \underset{|x|\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ pour un $\alpha > 0$.

Par hypothèse, $\int_R xf(x)dx = 0$ et $\int_R x^2 f(x)dx = 1$.

1) $\lim\limits_0 \frac{1-\widehat{f}(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

Comme X a une variance, $\widehat{f}$ est de classe C^2 sur R, avec $\widehat{f}\,'(x) = i\int_R t\,f(t)e^{itx}dx$

et $\widehat{f}''(x) = -\int_R t^2 f(t) e^{itx} dx$. On a donc $\widehat{f}(0) = 1$, $\widehat{f}'(0) = 0$, $\widehat{f}''(0) = -1$, d'où

$\widehat{f}(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \varepsilon(t) t^2$, ε étant une fonction *complexe* de limite nulle en $t = 0$.

2) il existe $A > 0$ tel que $|x| \le A$ implique $|\widehat{f}(x)| \le e^{-u^2/4}$.

Écrivons $|\widehat{f}(x)|^2 = (C(x))^2 + (S(x))^2$, avec $C(x) = \int_R \cos(tx) f(t) dt$ et $S(x) = \int_R \sin(tx) f(t) dt$.

Comme X est centrée et réduite, $C(0) = 1$, $S(0) = 0$, $C'(0) = 0$, $S'(0) = 0$, $C''(0) = -1$ et $S''(0) = 0$. Posons $h(x) = |\widehat{f}(x)|^2$: h est de classe C^2 et $h'(0) = 0$, $h''(0) = -2$. Il en résulte que $\lim\limits_{0} \dfrac{1-h(x)}{x^2} = 1$ et donc que $\dfrac{1-h(x)}{x^2} \ge \dfrac{1}{2}$ sur un intervalle $[-A, A]$.

Sur cet intervalle, $h(x) \le 1 - \dfrac{x^2}{2} \le e^{-x^2/2}$ et donc $|\widehat{f}(x)| \le e^{-x^2/4}$.

3) $f_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_R e^{-itx} \widehat{f_n}(t) dt$ dès que $n \ge \dfrac{2}{\alpha}$.

$|\widehat{f}(x)| \underset{|x| \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ et $\widehat{f_n}(x) = \left(\widehat{f}\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$ impliquent $|\widehat{f_n}(x)| \underset{|x| \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^{n\alpha}}\right)$ et donc $|\widehat{f_n}(x)| \underset{|x| \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand $n \ge \dfrac{2}{\alpha}$. Il en résulte que $\widehat{f_n}$ est intégrable sur R et la formule d'inversion de Fourier citée en **A 2)** donne alors $f_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_R e^{-itx} \widehat{f_n}(t) dt$ (presque partout).

4) $f_n \to \varphi$ uniformément sur R

Comme $\widehat{\varphi} = \sqrt{2\pi}\varphi$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_R e^{-itx} e^{-t^2/2} dt$, et on peut écrire :

$$2\pi |f_n(x) - \varphi(x)| \le \int_R \left|\widehat{f_n}(t) - e^{-t^2/2}\right| dt = \int_{|t| \le A\sqrt{n}} \left|\widehat{f_n}(t) - e^{-t^2/2}\right| dt + \int_{|t| > A\sqrt{n}} \left|\widehat{f_n}(t) - e^{-t^2/2}\right| dt$$, où

A est le réel défini en **2)**.

a) $\int_{|t| \le A\sqrt{n}} \left|\widehat{f_n}(t) - e^{-t^2/2}\right| dt \to 0$ d'après le théorème de convergence dominée :

$-$ Si une suite complexe (a_n) a pour limite a, $\left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n \to e^a$ car

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \le e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \text{ et donc } \left|\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n - e^{a_n}\right| \le e^{|a_n|} - \left(1 + \frac{|a_n|}{n}\right)^n.$$

On en déduit $\widehat{f_n}(t) \to e^{-t^2/2}$ avec $\widehat{f_n}(t) = \widehat{f}^n\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)$ et $\widehat{f}(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \varepsilon(t) t^2$. En effet,

$\widehat{f}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \dfrac{t^2}{2n} + \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ et alors $\widehat{f}^n\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \dfrac{t^2}{2n} + \dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \to \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$ ($a_n = -\dfrac{t^2}{2} + \varepsilon_n$).

– Comme $\left|\widehat{f_n}(t)-e^{-t^2/2}\right| \le \widehat{f_n}(t)+e^{-t^2/2}$, il suffit de majorer la suite $(\widehat{f_n})$ par une fonction intégrable ; or, pour $|t| \le A\sqrt{n}$, $|\widehat{f_n}(t)| = \left|\widehat{f}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le (e^{-t^2/4n})^n = e^{-t^2/4}$ d'après **B 2).**

b) $\int_{|t|>A\sqrt{n}} \left|\widehat{f_n}(t)-e^{-t^2/2}\right| \to 0$

Il suffit de prouver que la suite des intégrales $\int_{|t|>A\sqrt{n}} \left|\widehat{f_n}(t)\right|$ tende vers 0.

Pour $|t| \ge A\sqrt{n}$, $|\widehat{f_n}(t)| = \left|\widehat{f}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le \rho^{n-1}\left|\widehat{f}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|$, où $\rho = \rho(A) < 1$ **voir A 4)**

donc $\int_{|t|>A\sqrt{n}} \left|\widehat{f_n}(t)\right| dt \le \rho^{n-1} \int_{|t|>A\sqrt{n}} \left|\widehat{f}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| dt = \rho^{n-1}\sqrt{n} \int_{|t|>A} \left|\widehat{f}(t)\right| dt$ qui tend vers 0 comme la suite $\rho^{n-1}\sqrt{n}$.

5) Y_n **converge en loi vers une loi normale** $N(0,1)$

La convergence uniforme est inutile, la convergence **simple** de f_n vers φ suffit.
Montrons d'abord que $\int_R |f_n - \varphi| \to 0$. En effet, si $h_n = \min(\varphi, f_n)$, $0 \le h_n \le \varphi$ et $h_n \to \varphi$, et alors $\int h_n \to \int \varphi = 1$. Or, $|\varphi - f_n| = \varphi + f_n - 2h_n$, donc $\int |\varphi - f_n| \to 1+1-2 = 0$.
Soit B un borélien de R : $p(Y_n \in B) = \int_B f_n \to p(N \in B) = \int_B \varphi$ car

$$\left|\int_B f_n - \int_B \varphi\right| \le \int_R |f_n - \varphi| \to 0.$$

En appliquant à $B =]-\infty, x]$, on a la définition de la convergence en loi, $p(Y_n \le x) \to p(N \le x)$, et cette convergence est **uniforme** en x : $|p(Y_n \le x) - p(N \le x)| \le \varepsilon$ si n dépasse un N indépendant de x. Un théorème de Dini assure qu'il en est ainsi pour toute convergence en loi quand la fonction de répartition de la loi limite est *continue*.

6) $\forall p \ge 1$**, il existe** n_0 **au delà duquel** f_n **est de classe** C^p **et** $f_n^{(p)} \to \varphi^{(p)}$ **uniformément sur** R

Soit p un entier fixé ≥ 1.

a) Si $n \ge \frac{p+2}{\alpha}$, $x \mapsto x^p \widehat{f_n}(x)$ est intégrable, car $x^p \widehat{f_n}(x) \underset{\pm\infty}{=} O(x^{p-n\alpha}) \underset{\pm\infty}{=} O(x^{-2})$.
Comme $\widehat{f_n}$ est intégrable sur R, $f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_R e^{-itx}\widehat{f_n}(t)dt$. De plus, $x \mapsto x^p \widehat{f_n}(x)$ étant intégrable, f_n est C^p sur R et $f_n^{(p)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_R (-it)^p e^{-itx}\widehat{f_n}(t)dt$ (dérivation sous l'intégrale).

b) Comme $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_R e^{-itx}e^{-t^2/2}dt$, $\varphi^{(p)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_R (-it)^p e^{-itx}e^{-t^2/2}dt$, car $x \mapsto x^p e^{-x^2/2}$ est intégrable sur R (pour tout $p \in N$). On en déduit

$$2\pi \,|\, f_n^{(p)}(x)-\varphi^{(p)}(x)\,| \le \int_R |\,t\,|^p \left|\widehat{f_n}(t)-e^{-t^2/2}\right| dt$$
$$= \int_{|t|\le A\sqrt{n}} |\,t\,|^p \left|\widehat{f_n}(t)-e^{-t^2/2}\right| dt + \int_{|t|\ge A\sqrt{n}} |\,t\,|^p \left|\widehat{f_n}(t)-e^{-t^2/2}\right| dt.$$

c) $\int_{|t|\le A\sqrt{n}} |\,t\,|^p \left|\widehat{f_n}(t)-e^{-t^2/2}\right| dt \to 0$ en raison du théorème de convergence dominée car

$|\,t\,|^p \left|\widehat{f_n}(t)-e^{-t^2/2}\right|$ tend vers 0 et est majorée par une fonction intégrable. En effet, nous avons déjà prouvé que $\widehat{f_n}(t) \to e^{-t^2/2}$; quant à la majoration, il s'agit de $|\,t\,|^p\ (e^{-t^2/2}+e^{-t^2/4})$.

d) $\int_{|t|\ge A\sqrt{n}} |\,t\,|^p \left|\widehat{f_n}(t)-e^{-t^2/2}\right| dt \to 0$.

Il suffit évidemment de prouver que $\int_{|t|\ge a\sqrt{n}} |\,t\,|^p \left|\widehat{f_n}(t)\right| dt \to 0$. Comme en **4 b)**, pour $|\,t\,| \ge A\sqrt{n}$,

$|\,\widehat{f_n}(t)\,| = \left|\widehat{f}^{\,n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le \rho^{n-1}\left|\widehat{f}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|$, où $\rho=\rho(A)<1$ voir **A 4)**, donc

$$\int_{|t|>A\sqrt{n}} \left|t^p\,\widehat{f_n}(t)\right| dt \le \rho^{n-1}\int_{|t|>A\sqrt{n}} \left|t^p\,\widehat{f}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| dt = \rho^{n-1} n^{p+1/2}\int_{|t|>A} \left|t^p\,\widehat{f}(t)\right| dt$$

qui tend vers 0 comme la suite $\rho^{n-1}n^{p+1/2}$ (rappelons que $\left|t^p\,\widehat{f}(t)\right|$ est d'intégrale finie et $\rho<1$).

Partie C : Une condition suffisante pour qu'il existe $\alpha>0$ tel que $|\,\widehat{f}(x)\,| \underset{|x|\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$**.**

1) Nous prouvons : si f est C^1 par morceaux, <u>avec un nombre fini de morceaux</u>, et si $f\,'$ est intégrable sur R, alors $|\,\widehat{f}(x)\,| \underset{|x|\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Par hypothèse, il existe $x_1<x_2<\ldots<x_N$ tels que la restriction de f à $]x_k,x_{k+1}[$ se prolonge à $[x_k,x_{k+1}]$ en une fonction C^1 ($x_0=-\infty$ et $x_{N+1}=+\infty$).
En intégrant par parties $\widehat{f}(x)=\int_R e^{itx}f(t)dt$, on trouve $\widehat{f}(x)=\frac{i}{x}\int_R e^{itx}f\,'(t)dt+\frac{i}{x}\sum_1^N e^{ixx_k}\delta_k$,
avec $\delta_k=f(x_k^+)-f(x_k^-)$, d'où $|\,x\widehat{f}(x)\,| \le \sum_1^N|\,\delta_k\,| + \int_R|\,f\,'(t)\,|\,dt$.

Preuves :

a) $\lim\limits_{\pm\infty} f=0$. Les égalités $\int_{x_N}^{x} f\,' = f(x)-f(x_N^+)$ et $\int_{x}^{x_1} f\,' = f(x_1^-)-f(x)$ montrent que f a des limites finies aux deux infinis. Comme f est intégrable sur R, ces deux limites sont nulles.

b) $\widehat{f}(x)=\sum_{k=0}^{N}\int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{itx} f(t)dt$ et comme f est C^1 sur $[x_k,x_{k+1}]$,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{itx} f(t)dt=\frac{i}{x}\left[e^{itx}f(t)\right]_{t=x_{k+1}}^{t=x_k}+\frac{i}{x}\int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{itx} f'(t)dt .$$

Évidemment, $\sum_{k=0}^{N}\int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{itx} f'(t)dt=\int_R e^{itx} f'(t)dt$, tandis que

$$\sum_{k=0}^{N}\left[e^{itx}f(t)\right]_{t=x_{k+1}}^{t=x_k}=\sum_{k=0}^{N}\left[e^{ixx_k}f(x_k^+)-e^{ixx_{k+1}}f(x_{k+1}^-)\right]=\sum_{1}^{N}e^{ixx_k}\delta_k .$$

Conséquence. Puisque $\alpha=1$, nous avons vu que si $n\geq p+2$, f_n est de classe C^p et $f_n^{(p)}\to\varphi^{(p)}$ uniformément sur R. En d'autres termes, f_n est de classe C^{n-2} et $f_n^{(p)}\to\varphi^{(p)}$ uniformément sur R pour p allant de 1 à $n-2$.

Toutes les lois usuelles à densité et ayant une variance ont une densité, après centrage, qui vérifie la condition suffisante de ce paragraphe.

3) Un exemple

http://www.daniel-saada.eu/fichiers/32-densite_d_une_somme_de_lois_uniformes.pdf

Soit X uniforme sur $[-1,1]$: X est centrée mais non réduite ($\sigma=1/\sqrt{3}$), sa densité f vaut $1/2$ sur $[-1,1]$ et 0 ailleurs. Un petit calcul donne $\widehat{f}(x)=\frac{\sin x}{x}=\underset{\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right)$. En conséquence :

(i) pour $n\geq 2$, la densité f_n de $Y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n X_i$ est donnée par $f_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-itx}\widehat{f_n}(t)dt$, ou

$f_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-itx}\left(\frac{\sin(t/\sqrt{n})}{t/\sqrt{n}}\right)^n dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos(tx)\left(\frac{\sin(t/\sqrt{n})}{t/\sqrt{n}}\right)^n dt$. On démontre que

$$f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!2^n}\sum_{k=0}^{[(n+x)/2]}(-1)^k C_n^k(x+n-2k)^{n-1}$$ sur $]-n,n[$ et 0 ailleurs.

(ii) $f_n(x)$ converge uniformément sur R vers $\sqrt{\frac{3}{2\pi}}e^{-3x^2/2}$, densité de la loi normale $N(0,1/3)$.

(iii) f_n est C^{n-2} sur R si $n\geq 2$.