29 - PARAMÉTRISATION DU BORD D'UN CONVEXE COMPACT DU PLAN ET APPLICATION AUX NORMES DU PLAN

www.daniel-saada.eu

Alain Rémondière (rédaction D.S)

(enrichi et remanié en novembre 2013)

Soit K un convexe compact du plan $\mathbb{R}^2$ ayant O dans son intérieur. On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$.
Pour t réel on définit $r(\mathrm{t}) = sup\left\{r > 0 : re^{it} \in K\right\}$. Alors :

1) La fonction r est définie et *continue*

2) r est dérivable à gauche et à droite *en tout point*

3) L'ensemble des réels t où r n'est pas dérivable est *au plus dénombrable*

4) r est dérivable en t si et seulement si il existe une *unique* droite d'appui à K en $M(t) = r(t)\mathrm{e}^{it}$

5) Quand r est dérivable *partout*, r *est de classe* C^1

6) Quand r est C^1, il existe une fonction *continue* A telle que $r(t) = r(0)\exp\left(\int_0^t \operatorname{cotan}(A(t)-t)dt\right)$

7) Quand r est C^2, la longueur du bord de K est *majorée* par $2\pi.max\, r$

8) Quand r est C^2, $1/r + (1/r)'' \geq 0$.

1) La fonction r est définie et continue en tout point

Comme K contient une boule de centre O et de rayon $a > 0$ et est contenu dans une boule de centre O et de rayon b, r est définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π, et bornée par a et b. Le point $M(t) = r(t)\mathrm{e}^{it}$ est sur le bord Γ, ou la frontière, de K. Pour tout $\varepsilon > 0$:

– $(r(t)+\varepsilon)e^{it}$ n'est plus dans K par définition même de $r(t)$;

– $N = (r(t)-\varepsilon)e^{it}$ est dans l'intérieur de K car, par homothétie de centre $M(t)$, la boule de centre N et de rayon $a\dfrac{MN}{r(t)}$ est dans K.

Le bord Γ de K est donc l'ensemble des $r(t)\mathrm{e}^{it}$ quand t décrit $\mathbb{R}$ où $r(t) = \max\left\{r > 0 : re^{it} \in K\right\}$, K étant représenté par $\left\{re^{it} : t \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq r \leq r(t)\right\}$.

Soit (t_n) une suite de limite t : on va montrer que la suite bornée $(r(t_n))$ a pour limite $r(t)$ en prouvant que $r(t)$ est la seule valeur d'adhérence. Soit s une valeur d'adhérence de $r(t_n)$. La suite $r(t_n)e^{it_n}$ convergeant vers se^{it} et K étant fermé, on a $se^{it} \in K$, d'où $s \leq r(t)$. Raisonnons par l'absurde en supposant $s < r(t)$. Alors se^{it} est dans l'intérieur de K et il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B(se^{it}, \varepsilon)$ soit dans K. Mais par définition de $r(t_n)$ $\left(r(t_n)+1/n\right)e^{it_n} \notin K$, donc $\left|\left(r(t_n)+1/n\right)e^{it_n} - se^{it}\right| \geq \varepsilon$, ce qui est absurde puisque s est valeur d'adhérence des $r(t_n)$.

2) La fonction r est dérivable à gauche et à droite en tout point

On ne peut faire mieux comme le prouve l'exemple suivant. Soit K le carré $\max(|x|,|y|) \le 1$: $r(t) = 1/\cos t$ sur $[0,\pi/4]$, $r(t) = 1/\sin t$ sur $[\pi/4,\pi/2]$, $r'_d(\pi/4) = -\sqrt{2}$, $r'_g(\pi/4) = +\sqrt{2}$.

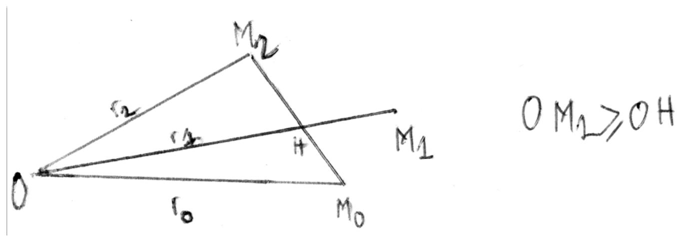
La dérivabilité en un point est une notion locale. Une rotation des axes peut toujours amener un point $M(t_0)$ en $M(0)$, la nouvelle fonction r devenant $t \to r(t+t_0)$: il en résulte que si r a en $t=0$ des dérivées à droite et à gauche, il en sera de même en tout t. Dans toute la suite, sauf en **a)**, nous bornerons donc les démonstrations à $t=0$.

a) L'inégalité de base sur la fonction r

On se donne $t_0 < t_1 < t_2 < t_0 + \pi$ et on pose $r_i = r(t_i)$ pour $i = 0,1,2$:

$$r_0 r_2 \sin(t_2 - t_0) \le r_0 r_1 \sin(t_1 - t_0) + r_1 r_2 \sin(t_2 - t_1).$$

On exploite le dessin, où $M_i = M(t_i) = r_i e^{it_i}$:

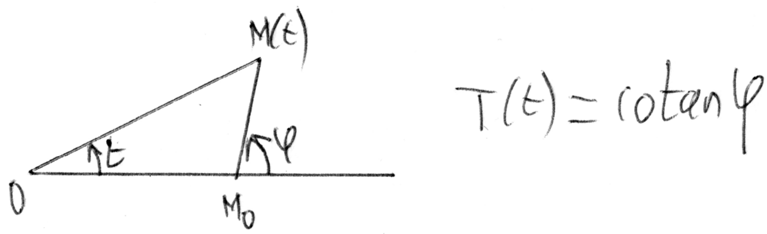


Comme K est convexe, $OM_1 \ge OH$ et donc l'aire du triangle OM_1M_2 surpasse l'aire de OHM_2 et l'aire de OM_0M_1 dépasse l'aire de OHM_0. L'inégalité résulte de ce que la somme des aires des triangles OM_1M_0 et OM_2M_1 vaut la surface de OM_0M_2 et que la surface d'un triangle OAB est donnée par $OA.OB.\sin\widehat{AOB}/2$.

Une démonstration formelle aurait pu être donnée au moyen des déterminants ; on aurait pu aussi déterminer le point K projeté de M_1 sur la droite OM_0 parallèlement à M_0M_2 et exprimer que OK dépasse OM_0.

b) La fonction auxiliaire T_0 attachée à $t=0$

Pour des raisons qui apparaîtront au fil du texte, on introduit la fonction T_0, définie sur $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$ par $T_0(t) = \dfrac{r(t)\cos t - r(0)}{r(t)\sin t}$. Quand $0 < |t| < |\pi/2|$, son interprétation géométrique est la suivante



Nous démontrons successivement, à partir de l'inégalité **a)** :

(i) T_0 décroît sur $]0,\pi/2[$ **(ii)** T_0 décroît sur $]-\pi/2,0[$

(iii) $T_0(t) \le T_0(t')$ si $-\pi/2 < t' < 0 < t < \pi/2$ **(iv)** T_0 a des limite finies en $t=0$.

Preuves :

(i) En faisant $t_0 = 0$ dans **a)**, il vient $T_0(t_1) \geq T_0(t_2)$ quand $0 < t_1 < t_2 < \pi$ car $\sin t_1$ et $\sin t_2$ sont positifs.

(ii) En faisant $t_2 = 0$ dans **a)** encore, on obtient la décroissance de T_0 sur $]-\pi, 0[$ car $-\pi < t_0 < t_1 < 0$ et le produit $\sin t_0 \sin t_1$ est > 0 : $\dfrac{r_0 \cos t_0 - r(0)}{r_0 \sin t_0} \geq \dfrac{r_1 \cos t_1 - r(0)}{r_1 \sin t_1}$.

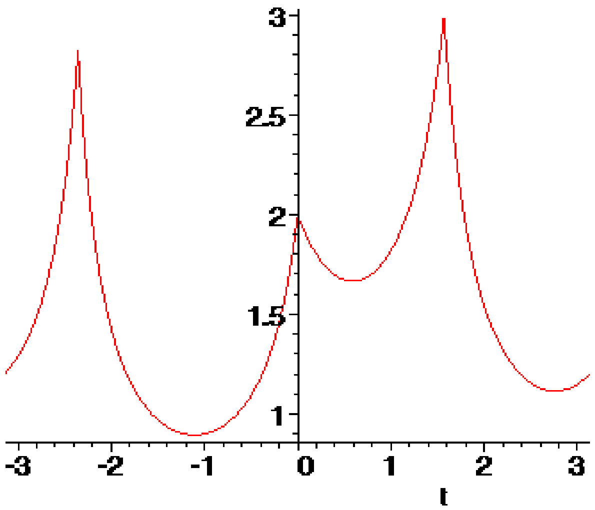
(iii) En faisant $t_1 = 0$, on aboutit à $T_0(t_2) \leq T_0(t_0)$ si $-\pi/2 < t_0 < 0 < t_2 < \pi/2$.

(iv) T_0 étant décroissante sur $]-\pi/2, 0[$ et minorée, décroissante sur $]0, \pi/2[$ et majorée, a des limites *finies* à gauche et à droite de $t = 0$, avec $T_0(0^+) \leq T_0(0^-)$.

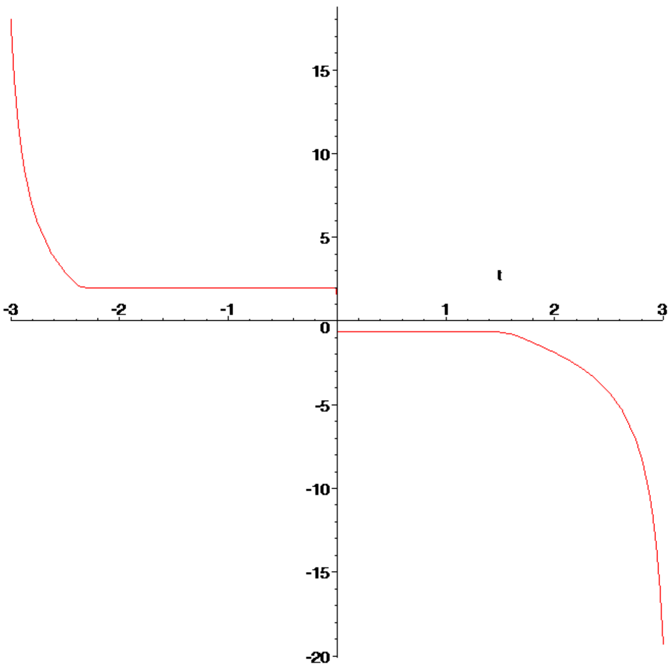
Exemple. Soit K le triangle plein fermé de sommets $A(2,0)$, $B(0,3)$ et $C(-2,-2)$. La fonction r est donnée par

$$r(t) = \begin{cases} 6/(3\cos t + 2\sin t) \ sur \ [0, \pi/2] \\ 6/(2\sin t - 5\cos t) \ sur \ [\pi/2, \pi] \\ 2/(\cos t - 2\sin t) \ sur \ [-3\pi/4, 0] \\ 6/(2\sin t - 5\cos t) sur \ [-\pi, -3\pi/4] \end{cases}$$

Le graphe de r sur $[-\pi, \pi]$ confirme la non dérivabilité en les trois sommets :



Le graphe de T_0 sur $]-\pi, \pi[$ est conforme aux propriétés de la fonction :



et pose la question de savoir si T_0 ne serait pas tout bonnement décroissante sur $]-\pi,\pi[$.

L'horizontalité du graphe sur $[-\pi/2,\pi/2]$ s'explique par l'interprétation géométrique de T_0 donnée en début de **b)**.

c) dérivabilité en $t=0$

L'identité $r(t)-r(0)=\dfrac{r(0)(1-\cos t)+r(0)T_0(t)\sin t}{\cos t-T_0(t)\sin t}$ montre que r est dérivable à droite et à gauche en $t=0$, avec $r'_d(0)=r(0)T_0(0^+)$ et $r'_g(0)=r(0)T_0(0^-)$; de plus, $r'_d(0)\le r'_g(0)$.

Les dérivées r'_d et r'_g existent donc en tout point et $r'_d\le r'_g$.

3) L'ensemble des réels t où la fonction r n'est pas dérivable est au plus dénombrable

Cette assertion découle d'une propriété plus générale sur les fonctions :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant en tout point des dérivées à droite et à gauche.
Alors, l'ensemble des réels x en lesquels f n'est pas dérivable est au plus dénombrable.

a) *L'ensemble* $A=\{x: f'_d(x)<0<f'_g(x)\}$ *est dénombrable.*

Comme $f'_d(x)=\lim\limits_{y\to x^+}\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$, il existe $h_1(x)>0$ tel que $y\in]x,x+h_1(x)[$ implique $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}<0$ donc $f(y)<f(x)$; de même, il existe $h_2(x)>0$ tel que $y\in]x-h_2(x),x[$ implique $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}>0$, d'où encore $f(y)<f(x)$ car $y-x<0$. Pour tout x de A, il existe donc $h(x)>0$ tel que $0<|y-x|<h(x)$ implique $f(y)<f(x)$. Soit A_p défini par $A_p=\{x\in A: h(x)>1/p\}$: deux réels distincts x et y de A_p ne peuvent vérifier $|x-y|<1/p$, sinon on aurait à la fois $0<|y-x|<h(x)$ et $0<|x-y|<h(y)$ d'où $f(y)<f(x)$ et $f(x)<f(y)$. Il en résulte que pour n entier $A_p\cap[-n,n]$ est de cardinal fini puis que $A_p=\bigcup_n A_p\cap[-n,n]$ est dénombrable ; il en est de même pour $A=\bigcup_p A_p$.

b) *Pour r et s rationnels tels que $r<s$, l'ensemble $\{x : f'_d(x) < r < s < f'_g(x)\}$ est dénombrable.*

Il suffit d'appliquer **a)** à la fonction $h(x) = f(x) - x(r+s)/2$ et de remarquer que

$$\{x : f'_d(x) < r < s < f'_g(x)\} \subset \{x : f'_d(x) < (r+s)/2 < f'_g(x)\}.$$

c) *L'ensemble $\{x : f'_d(x) < f'_g(x)\}$ est dénombrable.*

En effet, cet ensemble est la réunion dénombrable des ensembles $\{x : f'_d(x) < r < s < f'_g(x)\}$.

d) *L'ensemble $\{x : f'_d(x) \neq f'_g(x)\}$ est dénombrable.*

En passant à $-f$, on prouve que l'ensemble $\{x : f'_d(x) > f'_g(x)\}$ est dénombrable.

4) Droites d'appui du convexe compact K

En tout point M du bord du convexe fermé K existe au moins une droite d'appui, une droite D qui contient M et telle que K est inclus dans l'un des demi-plans fermés de frontière D. Pour un disque, les droites d'appui sont les tangentes à la circonférence ; pour un carré, en chaque sommet passent une infinité de droites d'appui, les autre droites d'appui étant les côtés. Nous prouvons maintenant

r est dérivable en t si et seulement si existe une seule droite d'appui en $M(t)$

Il en résultera que l'ensemble des points exceptionnels du bord de K est au plus dénombrable.

Démonstration.

Conformément à ce qui a été dit, on se borne toujours à $t=0$.
Soit D une droite d'appui en $M(0)$. D ne peut être horizontale sinon O serait sur D et K ne serait d'un même côté de D ; il en résulte que l'équation cartésienne de D est de la forme $x - r(0) = ay$.
Le demi-plan contenant K est d'inéquation $x - r(0) \leq ay$, donc pour tout réel t, $r\cos t - r(0) \leq ar\sin t$.
Pour $t \in]0,\pi[$, il vient donc $T(t) \leq a$, tandis que pour $t \in]-\pi,0[$, on a $T(t) \geq a$; en faisant tendre t vers 0, on obtient l'encadrement pour a : $T_0(0^+) \leq a \leq T_0(0^-)$.
Pour établir la réciproque, prouvons une cinquième propriété sur la fonction T_0 :

(vi) $T_0(t) \leq T_0(0^+)$ sur $[0,\pi[$ et $T_0(t) \geq T_0(0^-)$ sur $]-\pi,0]$.

Dans l'inégalité $\dfrac{r_1\cos t_1 - r(0)}{r_1\sin t_1} \geq \dfrac{r_2\cos t_2 - r(0)}{r_2\sin t_2}$ ($0 < t_1 < t_2 < \pi$), fixons t_2 et faisons tendre t_1 vers 0 : il vient $\dfrac{r_2\cos t_2 - r(0)}{r_2\sin t_2} \leq \dfrac{r'_d(0)}{r(0)}$, puis $T_0(t) \leq T_0(0^+)$ pour $t \in]0,\pi[$.

Partons maintenant de $\dfrac{r_0\cos t_0 - r(0)}{r_0\sin t_0} \geq \dfrac{r_1\cos t_1 - r(0)}{r_1\sin t_1}$, vraie si $-\pi < t_0 < t_1 < 0$, fixons t_0 et faisons tendre t_1 vers 0 : on aboutit à $T_0(t) \geq T_0(0^-)$ sur $]-\pi,0[$.

Donc, si $T_0(0^+) \leq a \leq T_0(0^-)$, alors $a \leq T_0(t)$ si $t \in]-\pi,0[$ et $a \geq T_0(t)$ quand $t \in]0,\pi[$ grâce à **(vi)**. On a alors $x - r(0) \leq ay$ sur le bord de K et, par convexité, sur K tout entier, ce qui achève la démonstration. Quand r est dérivable en $t=0$, l'unique droite d'appui en $M(0)$ est la tangente en $M(0)$ au bord, d'équation

$$(x - r(0))r(0) = y.r'(0).$$

5) Quand r est dérivable partout, r est de classe C^1

Soit $f(t)$ l'affixe de $M(t)$: $f(t)=r(t)e^{it}$: la tangente à Γ en $f(t)$ est l'unique droite d'appui à K en $f(t)$.

Cette tangente à pour équation $\det\left(X-f(t),f'(t)\right)=0$, où $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Comme $f'(t)=r'(t)e^{it}+ir(t)e^{it}$, on constate que $det\left(f(t),f'(t)\right)=r^2(t)>0$.

Comme O est dans K, on a $det\left(X-f(t),f'(t)\right)\leq 0$ pour tout $X\in K$ et tout t.

a) r' est bornée sur $\mathbb{R}$

Comme K contient une boule fermée de centre O et de rayon $a>0$:

$$\det\left(ae^{i\theta}-r(t)e^{it},r'(t)e^{it}+ir(t)e^{it}\right)\leq 0 \text{ pour tous } \theta \text{ et } t.$$

Si $\theta=t+\pi/2$

$$\det\left(aie^{it}-r(t)e^{it},r'(t)e^{it}+ir(t)e^{it}\right)=-ar'(t)-r^2(t)\leq 0.$$

Si $\theta=t-\pi/2$

$$\det\left(-aie^{it}-r(t)e^{it},r'(t)e^{it}+ir(t)e^{it}\right)=ar'(t)-r^2(t)\leq 0.$$

D'où $|r'(t)|\leq\dfrac{r^2(t)}{a}$; comme r est borné (K est borné), il en est de même de r'.

b) r' est continue

Si maintenant $t_n\to t$, soit l' une valeur d'adhérence de la suite bornée $r'(t_n)$: $L=(l'+ir(t))e^{it}$ est alors une valeur d'adhérence des $(f'(t_n))$. On sait que pour tout n, $\det\left(X-f(t_n),f'(t_n)\right)\leq 0$ sur K, aussi $\det\left(X-f(t),L\right)\leq 0$ sur K. Comme la droite d'appui en $f(t)$ est unique, L est colinéaire à $f(t)$: il existe un réel k tel que $L=k(r'(t)+ir(t))e^{it}$, d'où $L=k(r'(t)+ir(t))e^{it}=(l'+ir(t))e^{it}$.
Comme r et r' sont réelles, $k=1$ et $l'=r'(t)$. La suite $r'(t_n)$ n'a donc qu'une seule valeur d'adhérence qui est sa limite : $r'(t_n)\to r'(t)$.

6) Une formule intégrale pour r quand r est de classe C^1

a) *Le théorème du relèvement*

Comme f est également C^1 et que la fonction *continue* f' ne s'annule pas, il existe une fonction *continue* A, non unique, telle que $f'(t)=|f'(t)|e^{iA(t)}$ (théorème du relèvement), A étant une détermination continue de l'argument, ou angle, de $f'/|f'|$.

Mais $f'(t)=r'(t)e^{it}+ir(t)e^{it}$, d'où $\sin(A(t)-t)=\dfrac{r(t)}{\sqrt{r^2(t)+r'^2(t)}}>0$; le théorème des valeurs intermédiaires assure que tous les $A(t)-t$ se trouvent dans un *même* intervalle $]2k\pi,(2k+1)\pi[$. Quitte à retrancher $2k\pi$ à A, on peut donc imposer la condition $A(t)-t\in]0,\pi[$ pour tout t : le relèvement A est alors unique. De plus, pour tout t, $A(t+2\pi)-A(t)=2\pi$ et en particulier $A(2\pi)-A(0)=2\pi$. En effet, f étant de période 2π, $A(t+2\pi)-A(t)$ est un multiple de 2π ; par connexité, il existe un entier k pour lequel $A(t+2\pi)-A(t)=2k\pi$ pour tout t. L'écriture $A(t+2\pi)-A(t)=A(t+2\pi)-(t+2\pi)+t-A(t)+2\pi$ montre que $A(t+2\pi)-A(t)\in]\pi,3\pi[$, d'où $k=1$.

Exemple. Si K est un disque de centre O, $A(t)=t+\pi/2$.

b) $\boxed{r(t)=r(0)\exp\left(\int_0^t \operatorname{cotan}(A(x)-x)dx\right)}$.

Posons $v=|f'|$: $f'(t)=r'(t)e^{it}+ir(t)e^{it}=v(t)e^{iA(t)}$, d'où $\operatorname{cotan}(A(t)-t)=r'(t)/r(t)$ et la formule s'ensuit en intégrant (rappelons que $0<A(t)-t<\pi$). En particulier, par périodicité de r,

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{cotan}(A(t)-t)dt=0\,.$$

c) La fonction A est croissante

On sait depuis **5)** que pour tout X dans K et pour tout réel t, $det\left(X-f(t),f'(t)\right)\leq 0$, et donc $det\left(f(\theta)-f(t),f'(t)\right)\leq 0$ pour tous t et θ. Comme $det\left(f(\theta)-f(t),f'(t)\right)\leq 0$ équivaut à $det\left(f(\theta)-f(t),e^{iA(t)}\right)\leq 0$, il vient

$$r(\theta)\sin\left(A(t)-\theta\right)\leq r(t)\sin\left(A(t)-t\right)$$

et donc aussi $$r(t)\sin\left(A(\theta)-t\right)\leq r(\theta)\sin\left(A(\theta)-\theta\right).$$

En multipliant : $\sin\left(A(t)-\theta\right)\sin\left(A(\theta)-t\right)\leq \sin\left(A(t)-t\right)\sin\left(A(\theta)-\theta\right)$.

Avec $2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$, on obtient $\sin\left(A(t)-A(\theta)\right)\sin(t-\theta)\geq 0$.

Par continuité uniforme, il existe $\delta>0$ tel que $|t-\theta|\leq\delta$ entraîne $\left|A(t)-A(\theta)\right|\leq\pi$: il en résulte alors que A croît sur tout intervalle fermé de longueur δ, puis on établit facilement que A croît sur R.

7) Une majoration de la longueur du bord quand r est C^2

D'abord, toujours d'après le théorème du relèvement, A est maintenant de classe C^1 et donc A' existe et est continue.

a) La fonction A est à dérivée positive

Puisque A est croissante et dérivable, c'est l'évidence. Toutefois, il m'a paru intéressant de laisser figurer la démonstration infinitésimale originelle.

On sait depuis **5)** que pour tout X dans K et pour tout réel t, $det\left(X-f(t),f'(t)\right)\leq 0$, et donc $det\left(f(t+h)-f(t),f'(t)\right)\leq 0$ pour tous t et h. En développant au second ordre en h, $det\left(h\,f'(t)+h^2f''(t)/2+h^2\varepsilon(h),f'(t)\right)\leq 0$ ou encore $det\left(f''(t)+2\varepsilon(h),f'(t)\right)\leq 0$ ce qui induit $det\left(f''(t),f'(t)\right)\leq 0$. Calculons ce dernier déterminant en posant $v(t)=|f'(t)|$: on trouve $-v^2(t)A'(t)$, d'où $A'\geq 0$.

b) La longueur L du bord de K est majorée par $2\pi\max r$

D'abord, $L=\int_0^{2\pi}|f'(t)|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{r'^2(t)+r^2(t)}dt$; avec $f'(t)=|f'(t)|e^{iA(t)}$, $L=\int_0^{2\pi}f'(t)e^{-iA(t)}dt$.

En intégrant par parties, on trouve $L = i\int_0^{2\pi} f(t)A'(t)e^{-iA(t)}dt$; comme $A'(t) \geq 0$,

$$L \leq max\,|f|\int_0^{2\pi} A'(t)dt = max\,|f|\left(A(2\pi) - A(0)\right) = 2\pi.max\,r.$$

8) La condition classique $1/r + (1/r)'' \geq 0$

On a établi en **7 a)** $det\left(f''(t), f'(t)\right) \leq 0$ pour tout t. Or un calcul direct, basé sur $f(t) = r(t)e^{it}$, donne $det\left(f'(t), f''(t)\right) = r^2 + 2(r')^2 - rr'' \geq 0$; comme $1/r + (1/r)'' = \dfrac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{r^3}$, la condition est nécessaire.

Réciproquement, si $det\left(f'(t), f''(t)\right) = r^2 + 2(r')^2 - rr'' \geq 0$ pour tout t, ou $A' \geq 0$, alors $det\left(f(t+h) - f(t), f'(t)\right) \leq 0$ pour tous t et h, ou encore $det\left(X - f(t), f'(t)\right) \leq 0$ pour tout X dans K et pour tout réel t.

Démonstration. L'inégalité $det\left(f(\theta) - f(t), f'(t)\right) \leq 0$ équivaut à $det\left(f(\theta) - f(t), e^{iA(t)}\right) \leq 0$, ou encore à

$$r(\theta)\sin\left(A(t) - \theta\right) \leq r(t)\sin\left(A(t) - t\right).$$

Notre but est donc de prouver que $g(\theta) = r(\theta)\sin\left(A(t) - \theta\right) \leq g(t)$ quand θ décrit $[t-\pi, t+\pi]$; par continuité de g, on peut se limiter à $]t-\pi, t+\pi[$, ou remarquer plus simplement que $g(t \pm \pi) < 0$ alors que $g(t) > 0$.
On dérive g : $g'(\theta) = r'(\theta)\sin\left(A(t) - \theta\right) - r(\theta)\cos\left(A(t) - \theta\right)$ est du signe de

$$\text{cotan}\left(A(\theta) - \theta\right)\sin\left(A(t) - \theta\right) - \cos\left(A(t) - \theta\right) = \frac{\sin\left(A(t) - A(\theta)\right)}{\sin\left(A(\theta) - \theta\right)}.$$

Comme $\sin\left(A(\theta) - \theta\right) > 0$, $g'(\theta)$ est du signe de $\sin\left(A(t) - A(\theta)\right)$.

Les inégalités $t - \pi < \theta < t + \pi$, $0 < A(t) - t < \pi$, $0 < A(\theta) - \theta < \pi$ entraînent $-2\pi < A(t) - A(\theta) < 2\pi$ et donc $g'(\theta) = 0$ seulement si $A(t) - A(\theta) = 0, \pm\pi$. La croissance de A, jointe à $g(t \pm \pi) < 0$, permet d'affirmer que le maximum de $g(\theta)$ sur $[t-\pi, t+\pi]$ est bien $g(t)$, la réciproque est établie.

9) Caractérisation intégrale des convexes compacts du plan tels que r soit C^2

On a vu en **6)** que quand r était C^1, il existait une fonction continue A telle que $f'(t) = |f'(t)|e^{iA(t)}$, $A(t) - t \in]0, \pi[$, $A(t+2\pi) - A(t) = 2\pi$, $\int_0^{2\pi} \text{cotan}(A(t) - t)dt = 0$ et $r(t) = r(0)\exp\left(\int_0^t \text{cotan}(A(x) - x)dx\right)$.

Si de plus r est C^2, on a démontré que la fonction A est croissante et C^1.

Réciproquement, soit A une fonction de classe C^1 et croissante telle que :

a) $\forall t \quad A(t) - t \in]0, \pi[$ **b)** $A(t+2\pi) - A(t) = 2\pi$ **c)** $\int_0^{2\pi} \text{cotan}(A(t) - t)dt = 0$.

Si on pose $r(t) = r(0)\exp\left(\int_0^t \text{cotan}(A(x) - x)dx\right)$, $r(0) > 0$, $K = \left\{re^{it} : t \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq r(t)\right\}$, $f(t) = r(t)e^{it}$,

alors : **(i)** r est C^2 et $f'(t) = |f'(t)|e^{iA(t)}$

(ii) K est un convexe compact ayant O dans son intérieur et $r(t) = max\left\{r > 0 : re^{it} \in K\right\}$.

(i) r est manifestement C^2 puisque $r'(t)=r(t)cotan\left(A(t)-t\right)$ et que l'on peut dériver cette identité ; comme $f'(t)=r'(t)e^{it}+ir(t)e^{it}$, il vient $\dfrac{f'(t)}{|f'(t)|}=\dfrac{\left(\cot\text{an}(A(t)-t)+i\right)e^{it}}{\sqrt{1+\cot\text{an}^2(A(t)-t)}}=e^{it}e^{i(A(t)-t)}=e^{iA(t)}$.

(ii) r est de période 2π car d'une part $t\mapsto A(t)-t$ est de période 2π , d'autre part $\int_0^{2\pi}\cot\text{an}(A(t)-t)dt=0$.

Il en résulte que t peut être astreint à parcourir seulement l'intervalle $[0,2\pi]$; sur ce compact, la fonction continue et strictement positive r est bornée et atteint ses bornes, d'où $0<m\le r(t)\le M$. On peut donc affirmer que K est borné.

Prouvons que K est fermé en envisageant une suite convergente $\rho_n e^{it_n}$ de K . D'abord ρ_n a une limite ρ , ensuite (t_n) qui est confinée sur $[0,2\pi]$ a une sous-suite convergente, notée encore (t_n) : $t_n\to t$; enfin, $\rho_n\le r(t_n)$ implique $\rho\le r(t)$ par continuité de r , d'où $\lim\limits_n \rho_n e^{it_n}\in K$.

K **est convexe en vertu de 8)** .

On a ici $r^2+2r'^2-rr''=r^2\dfrac{A'(t)}{\sin^2\left(A(t)-t\right)}$, donc $det\left(f'(t),f''(t)\right)=r^2+2(r')^2-rr''\ge 0$ et par conséquent $det\left(X-f(t),f'(t)\right)\le 0$ pour tout X dans K et pour tout réel t : K est donc contenu dans une intersection de demi-plans, laquelle est convexe.

Montrons maintenant que K est l'intersection des demi-plans $det\left(X-f(t),f'(t)\right)\le 0$ quand t décrit R .

On pose $X=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ et on suppose $det\left(X-f(t),f'(t)\right)\le 0$, condition équivalente à

$r.r(t)\cos(t-\theta)+r.r'(t)\sin(t-\theta)\le r^2(t)$ et donc $r\cos(t-\theta)+r\dfrac{\cos\left(A(t)-t\right)}{\sin\left(A(t)-t\right)}\sin(t-\theta)\le r(t)$.

Or, pour $t=\theta$, on obtient $r\le r(\theta)$, X est donc dans K par définition, qui est alors convexe.

Enfin, O est dans l'intérieur de K car par convexité, $B(0,m)\subset K$; par convexité encore,

$$r(\mathrm{t})=max\left\{r>0: re^{it}\in K\right\}.$$

10) Application aux disques fermés d'un plan normé

Soit N une norme sur R^2 : la boule unité fermée est un convexe compact ayant O dans son intérieur.

Il est facile de vérifier que $r(t)=1/N(e^{it})$. On démontre (voir **indication**) que N est différentiable en $r(t)e^{it}$ si et seulement si r est dérivable en t . L'ensemble des points du disque unité en lesquels N n'est pas différentiable est donc *au plus dénombrable*.

Indication. En dimension finie, une norme est différentiable en un x de la sphère unité si et seulement si il existe un unique hyperplan d'appui en x à la boule unité fermée (Composition d'Analyse de l'Agrégation 1979, http://megamaths.perso.neuf.fr/annales/agregationexterne1979comp2e.pdf).