28 - FONCTIONS DÉRIVABLES À DROITE ET À GAUCHE *(mise à jour)*

www.daniel-saada.eu

C'est Alain Rémondière qui a attiré mon attention sur ces fonctions à travers un exemple plein d'intérêt que j'expose partie **D**. En me documentant, je découvris que Bourbaki **[1]** avait étudié en détail les fonctions dérivables à droite et à gauche, notamment les fonctions convexes, et donnait en particulier une inégalité des accroissements finie de portée plus générale. Telle fut la genèse de cet article.

Les fonctions considérées sont toutes définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et continues. Quand elles existent, la dérivée à droite d'une fonction f est notée f'_d, sa dérivée à gauche f'_g. Une fonction dérivable à droite et à gauche est continue. Si f continue a une dérivée à droite en tout point, f'_d est de première classe de Baire (**[2]**, chap. 14, page 223) puisque f'_d est la limite simple de la suite des fonctions continues $x \to \dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$; de même $f'_g(x) = \lim\limits_n \dfrac{f(x)-f(x-1/n)}{1/n}$. Ces deux dérivées sont donc chacune continues sur un G_δ dense ; comme l'intersection de deux G_δ denses est un G_δ dense, f'_d et f'_g sont simultanément continues sur une partie dense de $\mathbb{R}$. Ce qui suit a pour but de préciser ces résultats par trop généraux.

Partie A - L'inégalité des accroissements finis pour les fonctions numériques dérivables à droite

1) Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable à droite sur $]a,b[$

a) $f'_d \geq 0$ *implique* $f(b) \geq f(a)$

On se donne $\varepsilon > 0$ et soit $J = \{y \in [a,b] : f(x) - f(a) \geq -\varepsilon(x-a) \text{ pour tout } x \text{ de } [a,y]\}$

J est par définition un intervalle contenant a ; si $c = \sup J$, c est dans J par continuité de f. Si $c < b$, alors f est dérivable à droite en c, $f'_d(c) = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ est ≥ 0 par hypothèse et donc $f(x) - f(c) \geq -\varepsilon(x-c)$ sur un segment $[c, c+h]$ de $[c,b]$. Mais alors

$$f(c+h) - f(a) = f(c+h) - f(c) + f(c) - f(a) \geq -\varepsilon h - \varepsilon(c-a) = -\varepsilon(c+h-a)$$

ce qui contredit $c = \sup J$. On a donc $c = b$ et $f(b) - f(a) \geq -\varepsilon(b-a)$. Comme ε est arbitrairement voisin de 0, $f(b) \geq f(a)$.

b) $|f'_d| \leq M$ *implique* $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$

On applique **a)** aux fonctions $g(x) = Mx - f(x)$ et $h(x) = Mx + f(x)$ dont les dérivées à droite sont positives sur $]a,b[$. Donc $g(b) = Mb - f(b) \geq g(a) = Ma - f(a)$ et $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$; de même, $h(b) = Mb + f(b) \geq h(a) = Ma + f(a)$ et $f(a) - f(b) \leq M(b-a)$ et donc $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.

Conséquences :

c) f'_d nulle entraine f constante

d) si $f'_d(x)$ tend vers ℓ finie quand $x \to x_0$, alors f'_d existe en x_0 et $f'_d(x_0) = \ell$ (*continuité des dérivées*).

2) L'inégalité des accroissements finis pour les fonctions dérivables à droite sauf sur un dénombrable

Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable à droite sur $]a,b[$ en dehors d'une partie *dénombrable* D de $]a,b[$.
Si m et M sont les bornes inférieure et supérieure de f'_d sur $]a,b[-D$, alors

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

On trouvera dans **[1]** une démonstration complète et détaillée.

Partie B - Propriétés des fonctions dérivables à droite et à gauche

1) Si f'_d est continue en un point a, f est dérivable en ce point.

$\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $h > 0$ tel que $|f'_d(x) - f'_d(a)| \le \varepsilon$ sur $[a-h, a+h]$. En posant $g(x) = f(x) - xf'_d(a)$, on a $|g(a) - g(x)| \le \varepsilon(a-x)$ sur $[a-h, a]$, d'où $|f(a) - f(x) + (x-a)f'_d(a)| \le \varepsilon(a-x)$ et donc $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'_d(a)\right| \le \varepsilon$. Cette majoration prouve que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers $f'_d(a)$ quand x tend vers a^-. On sait alors que f est dérivable à gauche en a avec $f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a)$: f est donc dérivable en a.

On a dit que f'_d était continue sur un G_δ dense de $\mathbb{R}$: on en déduit que f' existe en dehors d'un F_σ d'intérieur vide, dont on verra qu'il est réduit à un ensemble dénombrable. Si f'_d (ou f'_g) est *continue partout*, f est C^1 puisque $f' = f'_d$. On peut aussi le démontrer en introduisant $g(x) = f(x) - f(u) - \int_u^x f'_d(t)dt$ où u est dans l'intervalle : g'_d est identiquement nulle donc g est constante ; comme $g(u) = 0$, $f(x) = f(u) + \int_u^x f'_d(t)dt$, ce qui établit le caractère C^1 de f.

2) Si f'_d et f'_g existent en tout point, elles sont égales sauf sur un dénombrable de I

Démonstration communiquée par Alain Rémondière.

a) *L'ensemble $A = \{x : f'_d(x) < 0 < f'_g(x)\}$ est dénombrable.*

Comme $f'_d(x) = \lim_{y\to x^+} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$, il existe $h_1(x) > 0$ tel que $y \in]x, x+h_1(x)[$ implique $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} < 0$ donc $f(y) < f(x)$; de même, il existe $h_2(x) > 0$ tel que $y \in]x-h_2(x), x[$ implique $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$, d'où encore $f(y) < f(x)$ car $y - x < 0$. Pour tout x de A, il existe donc $h(x) > 0$ tel que $0 < |y-x| < h(x)$ implique $f(y) < f(x)$. Soit A_p défini par $A_p = \{x \in A : h(x) > 1/p\}$: deux réels distincts x et y de Ap ne peuvent vérifier $|x-y| < 1/p$, sinon on aurait à la fois $0 < |y-x| < h(x)$ et $0 < |x-y| < h(y)$ d'où $f(y) < f(x)$ et $f(x) < f(y)$. Il en résulte que pour n entier $A_p \cap [-n, n]$ est de cardinal fini puis que $A_p = \bigcup_n A_p \cap [-n, n]$ est dénombrable ; il en est de même pour $A = \bigcup_p A_p$

b) *Pour r et s rationnels tels que $r < s$, l'ensemble $\{x : f'_d(x) < r < s < f'_g(x)\}$ est dénombrable.*

Il suffit d'appliquer **a)** à la fonction $h(x) = f(x) - x(r+s)/2$ et de remarquer que

$$\{x : f'_d(x) < r < s < f'_g(x)\} \subset \{x : f'_d(x) < (r+s)/2 < f'_g(x)\}.$$

c) *L'ensemble $\{x : f'_d(x) < f'_g(x)\}$ est dénombrable.*

En effet, cet ensemble est la réunion dénombrable des ensembles $\{x : f'_d(x) < r < s < f'_g(x)\}$.

d) *L'ensemble $\{x : f'_d(x) \ne f'_g(x)\}$ est dénombrable.*

En passant à $-f$, on prouve que l'ensemble $\{x : f'_d(x) > f'_g(x)\}$ est dénombrable.

On savait que l'ensemble des points de non dérivabilité de f était une réunion dénombrable de fermés sans point intérieur, on sait maintenant que ces fermés sont des points.

Réciproquement, si $A=(a_n)$ est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, il existe une fonction dérivable à droite et à gauche en tout point dont l'ensemble des points de non dérivabilité est exactement A. Un exemple a été donné en **4 e)** avec f convexe. Voici une autre construction.

On choisit une fonction u dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et possédant en 0 des dérivées à droite et à gauche distinctes : si u et ses dérivées sont bornées sur $\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_n \frac{u(x-a_n)}{2^n}$ répond à la question ; on pourra choisir $u(x)=\frac{|x|}{|x|+1}$.

Complément. Le résultat est encore vrai quand la fonction f prend ses valeurs dans un *espace normé* (**[1]**, chap. 1, exercice 4) ; on pourra consulter ma solution sur www.daniel-saada.eu/Un_exercice_de_Bourbaki.pdf

Partie C - L'exemple des fonctions convexes

On sait que pour f convexe, si $x<t<y$, alors $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\le\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(t)-f(y)}{t-y}$ (se rappeler que $(x,y)\to\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ est croissante en x et y).

1) *Une fonction convexe est dérivable à droite et à gauche en tout point et* $f'_g\le f'_d$

f'_d et f'_g existent en tout point car $t\to\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ est croissante et majorée par $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, aussi $f'_d(x)$ existe et $f'_d(x)\le\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$; de même, $f'_d(y)$ existe et $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le f'_g(y)$.

En faisant tendre y vers t^+, puis x vers t^-, il vient $f'_g(t)\le f'_d(t)$.

Une fonction convexe est *continue* en tout point.

2) f' *existe sauf sur un dénombrable et est croissante*

On peut le déduire de **B-2**, mais il y a plus simple pour les fonctions convexes.
Soit F l'ensemble de non dérivabilité de f : pour $x\in F$, posons $J(x)=]f'_g(x),f'_d(x)[$. Comme $f'_d(x)\le\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le f'_g(y)$, $J(x)$ et $J(y)$ sont *disjoints* quand $x<y$: il en résulte que l'ensemble de ces intervalles est au plus dénombrable, et il en est de même de F. De plus, f'_d et f'_g sont croissantes car $f'_g(x)\le f'_d(x)\le f'_g(y)\le f'_d(y)$.

3) Si f' *existe sauf sur un dénombrable et est croissante, f est convexe si* f *est continue*

Si f n'était pas convexe, il existerait des réels a,b,c tels que $a<c<b$ et $\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

Soit E l'ensemble sur lequel f' existe : comme le complémentaire de E est *dénombrable*, en vertu de **A 2)**,

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\le\sup\{f'(x):x\in E,a<x<c\} \text{ et } \frac{f(b)-f(c)}{b-c}\ge\inf\{f'(x):x\in E,c<x<b\}.$$

On aurait donc $\sup\{f'(x):x\in E,a<x<c\}>\inf\{f'(x):x\in E,c<x<b\}$, ce qui contredit la croissance de f' sur E.

4) f'_d *est continue à droite et* f'_g *continue à gauche*

Quand $u<x$, $u\to f'_g(u)$ croît et est majorée par $f'_g(x)$, aussi f'_g a une limite finie quand $u\to x^-$. On sait que cette limite est alors égale à $f'_g(x)$ (*continuité des dérivées*).

Il en résulte que f'_d et f'_g sont *continues* en tout point où f est dérivable ; on en déduit aussi que si une suite (x_n) de points de dérivabilité de f converge vers un point de dérivabilité x, alors $f'(x_n) \to f'(x)$.

5) Formes intégrales d'une fonction convexe

Soit f convexe sur un intervalle ouvert I.

a) *Une fonction convexe est l'intégrale de sa dérivée à droite* : $f(b)-f(a)=\int_a^b f'_d$ pour tous a et b dans I

D'abord, la fonction croissante f'_d est intégrable sur tout segment. Ensuite, posons $g(x)=\int_a^x f'_d$: comme f'_d est continue à droite, il en de même de g et $g'_d(x)=f'_d(x)$. On en déduit que $g-f$ est constante ; comme $g(a)=0$, $f(x)=f(a)+\int_a^x f'_d$.

b) *Une fonction convexe est l'intégrale de sa dérivée* : $f(b)-f(a)=\int_a^b f'$ pour tous a et b dans I

En effet, $f'=f'_d$ presque partout.

Voici une démonstration directe :

Sauf sur l'ensemble dénombrable D où elle n'existe pas, f' est la limite simple de la suite des fonctions continues $f_n(x)=\dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$: f_n converge donc vers f' presque partout. Par convexité, $f_{n+1}\le f_n$; de plus, $\int_a^b f_n=\frac{1}{n}\int_b^{b+1/n} f-\frac{1}{n}\int_a^{a+1/n} f \to f(b)-f(a)$ parce que f est continue. D'après le théorème de Beppo-Levi (**[2]**, Chap. 11, p 185) : $\int_a^b f'=\lim_n \int_a^b f_n = f(b)-f(a)$.

c) Soit g définie et croissante sur $I-D$, où I est un intervalle ouvert et D une partie dénombrable de I.

Premièrement, g est égale presque partout à une fonction h croissante sur I. En effet, g se prolonge en une fonction croissante h sur I en posant, pour $x\in D$, $h(x)=\sup\{g(t) : t<x, t\in I-D\}$; comme $m(D)=0$, $g=h$ pp. On en déduit que g est intégrable sur tout segment de I puisque h l'est.

Deuxièmement, posons alors $F(x)=\int_a^x g$: F est une fonction convexe sur I car, par croissance de g,
$\dfrac{F(x)-F(y)}{x-y}=\dfrac{1}{y-x}\int_x^y g=\int_0^1 g\big(x+t(y-x)\big)dt$ et donc $\dfrac{F(x)-F(y)}{x-y}\le\dfrac{F(x)-F(z)}{x-z}$ si $x<y<z$.

Troisièmement, comme $\int_a^x g=\int_a^x h$, F est dérivable en tout point de continuité de h. Soit D' l'ensemble, dénombrable, des points de discontinuité de h. En dehors de $D\cup D'$, $F'(x)=h(x)=g(x)$.

Le **c)** est donc la réciproque du **b)**.

6) Il existe une fonction convexe non dérivable sur une partie (dénombrable) **dense**

Soit $A=(a_n)$ une partie dense dénombrable de réels et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels *strictement* positifs telle que $S=\sum_n C_n$ soit *finie*. Pour x réel, posons $A_x=\{n\in\mathbb{N} : a_n<x\}$ et $f(x)=\sum_{A_x} C_n$. La fonction f est positive, croissante, majorée par S ; elle admet donc des limites à droite et à gauche en tout x, notée respectivement $f(x^+)$ et $f(x^-)$.

Si $T\subset\mathbb{N}$, posons $m(T)=\sum_{n\in T} C_n$: m est une mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de masse S et $f(x)=m(A_x)$.

f **est continue à gauche sur** $\mathbb{R}$. Pour x fixé, posons $A_n = A_{x-1/n}$: les A_n croissent et leur réunion est A_x : il en résulte que $m(A_n) \to m(A_x)$ et donc que $\lim\limits_{h\to 0^+} f(x-h) = f(x)$.

f **est discontinue en tout point de** A. Soit x dans A, $x = a_m$; pour tout $\varepsilon > 0$

$f(a_m+\varepsilon) \geq f(a_m) + C_m$, d'où la discontinuité à droite de f en a_m puisque $C_m > 0$.

Le lecteur prouvera sans difficulté que $f(a_m{}^+) = f(a_m) + C_m$.

f **est continue en tout point de** $\mathbb{R} - A$:

Prouvons que $m(A_{x+h}) \underset{h\to 0^+}{\to} m(A_x)$ .Pour x fixé dans $\mathbb{R}-A$, Posons $A_n = A_{x+1/n}$: les A_n décroissent et leur intersection est A_x *car* x *n'est pas dans* A, ce qui achève l'étude de la continuité de f.

Étude de $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Une intégrale est dérivable partout où la fonction est continue : F est donc dérivable sur $\mathbb{R}-A$. Comme $f = F'$ est croissante, F est convexe sur $\mathbb{R}$ en vertu de **3)**. De plus, F n'est dérivable en aucun a de A, car

$$F'_g(a) = f(a^-) = f(a) \text{ et } F'_d(a) = f(a^+) \neq f(a).$$

La fonction convexe F n'est pas dérivable sur l'ensemble dense A.

Forme explicite de F

Pour intégrer f sur $[0,x]$, écrivons $f(x)$ sous la forme $\sum_n C_n.1_{a_n<x}$ et prouvons que $F(x) = \sum_n C_n \int_0^x (1_{a_n<t})dt$

La suite des fonctions $N \to \sum_0^N C_n.1_{a_n<x}$ est croissante et majorée par sa limite f, qui est intégrable car croissante et majorée ; le théorème de Beppo-Levi assure alors que

$$\int_0^x f(t)dt = \lim_N \int_0^x \left(\sum_0^N C_n.1_{a_n<t}\right)dt = \lim_N \sum_0^N C_n \int_0^x (1_{a_n<t})dt = \sum_0^\infty C_n \int_0^x (1_{a_n<t})dt.$$

On retrouve le caractère convexe de f car $\int_0^x (1_{a<t})dt = \dfrac{|x-a|+x-|a|}{2}$.

Partie D - Bords des convexes compacts du plan (Alain Rémondière)

Soit K un convexe compact du plan $\mathbb{R}^2$ ayant O dans son intérieur. On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. Pour t réel, on définit $r(t) = \sup\left\{r > 0 : re^{it} \in K\right\}$: nous allons prouver que la fonction r est définie, continue, dérivable à gauche et à droite *en tout point.* On ne peut faire mieux comme le prouve l'exemple suivant :

Soit K le carré $\max(|x|,|y|) \leq 1$: $r(t) = 1/\cos t$ sur $[0,\pi/4]$, $r(t) = 1/\sin t$ sur $[\pi/4,\pi/2]$, $r'_d(\pi/4) = -\sqrt{2}$, $r'_g(\pi/4) = +\sqrt{2}$.

1) La fonction r **est définie et continue en tout point**

Comme K contient une boule de centre O et de rayon $a > 0$ et est contenu dans une boule de centre O et de rayon b, r est définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π, et bornée par a et b. Le point $M(t) = r(t)\mathrm{e}^{it}$ est sur le bord, ou la frontière de K. Pour tout $\varepsilon > 0$:

- $(r(t)+\varepsilon)e^{it}$ n'est plus dans K par définition même de $r(t)$;
- $N = (r(t)-\varepsilon)e^{it}$ est dans l'intérieur de K car, par homothétie de centre $M(t)$, la boule de centre N et de rayon $a\dfrac{MN}{r(t)}$ est dans K.

Le bord Γ de K est donc l'ensemble des $r(t)e^{it}$ quand t décrit $\mathbb{R}$ où $r(t)=\max\{r>0 : re^{it}\in K\}$, K étant représenté par $\{re^{it} : t\in\mathbb{R} \text{ et } 0\le r\le r(t)\}$.

Soit (t_n) une suite de limite t : on va montrer que la suite bornée $(r(t_n))$ a pour limite $r(t)$ en prouvant que $r(t)$ est la seule valeur d'adhérence. Soit s une valeur d'adhérence de $r(t_n)$. La suite $r(t_n)e^{it_n}$ convergeant vers se^{it} et K étant fermé, on a $se^{it}\in K$, d'où $s\le r(t)$. Raisonnons par l'absurde en supposant $s<r(t)$. Alors se^{it} est dans l'intérieur de K et il existe alors $\varepsilon>0$ tel que la boule ouverte $B(se^{it},\varepsilon)$ soit dans K. Mais par définition de $r(t_n)$, $(r(t_n)+1/n)e^{it_n}\notin K$, donc $\left|(r(t_n)+1/n)e^{it_n}-se^{it}\right|\ge\varepsilon$, ce qui est absurde puisque s est valeur d'adhérence des $r(t_n)$.

2) La fonction r est dérivable à gauche et à droite en tout point

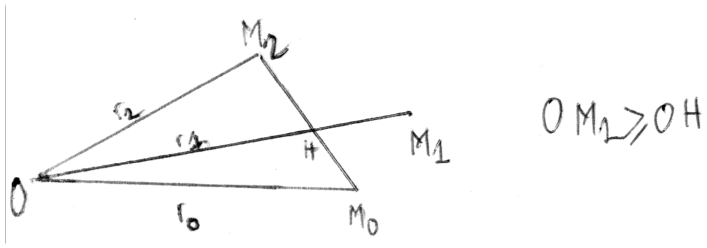
La dérivabilité en un point est une notion locale. Une rotation des axes peut toujours amener un point $M(t_0)$ en $M(0)$, la nouvelle fonction r devenant $t\to r(t+t_0)$: il en résulte que si r a en $t=0$ des dérivées à droite et à gauche, il en sera de même en tout t. Dans toute la suite, sauf en **a)**, nous bornerons donc les démonstrations à $t=0$.

a) L'inégalité essentielle sur la fonction r

On se donne $t_0<t_1<t_2<t_0+\pi$ et on pose $r_i=r(t_i)$ pour $i=0,1,2$: $r_0r_2\sin(t_2-t_0)\le r_0r_1\sin(t_1-t_0)+r_1r_2\sin(t_2-t_1)$.

Démonstration.

On exploite le dessin, dans lequel $M_i=M(t_i)=r_ie^{it_i}$ pour $i=0,1,2$:

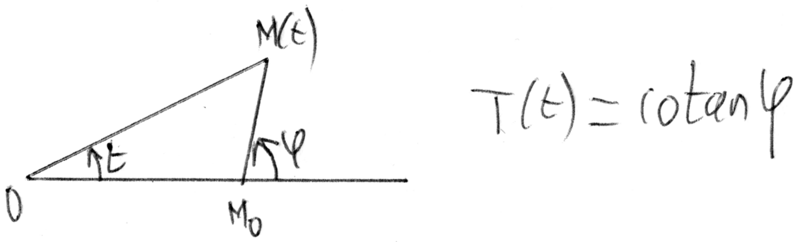


Comme K est convexe, $OM_2\ge OH$ et donc l'aire du triangle OM_1M_2 surpasse l'aire de OHM_2 et l'aire de OM_0M_1 dépasse l'aire de OHM_0. L'inégalité résulte de ce que la somme des aires des triangles OM_1M_0 et OM_2M_1 vaut la surface de OM_0M_2 et que la surface d'un triangle OAB est donnée par $OA.OB.\sin\widehat{AOB}$.

Une démonstration formelle pourrait être donnée au moyen des déterminants.

b) La fonction auxiliaire T_0 attachée à $t=0$

Pour des raisons qui apparaitront au fil du texte, on introduit la fonction T_0, définie sur $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$ par $T_0(t)=\dfrac{r(t)\cos t-r(0)}{r(t)\sin t}$. Quand $0<|t|<|\pi/2|$, son interprétation géométrique est la sulvante



Nous démontrons successivement, à partir de l'inégalité **a)** :

(i) T_0 décroit sur $]0,\pi/2[$ **(ii)** T_0 décroit sur $]-\pi/2,0[$

(iii) $T_0(t)\le T_0(t')$ si $-\pi/2<t'<0<t<\pi/2$ **(iiii)** T_0 a des limite finies finie en $t=0$.

Preuves :

(i) En faisant $t_0=0$ dans **a)**, il vient $T_0(t_1)\ge T_0(t_2)$ quand $0<t_1<t_2<\pi$ car $\sin t_1$ et $\sin t_2$ sont positifs.

(ii) En faisant $t_2=0$ dans **a)** encore, on obtient la décroissance de T_0 sur $]-\pi,0[$ car $-\pi<t_0<t_1<0$ et le produit $\sin t_0\sin t_1$ est >0 : $\dfrac{r_0\cos t_0-r(0)}{r_0\sin t_0}\ge\dfrac{r_1\cos t_1-r(0)}{r_1\sin t_1}$.

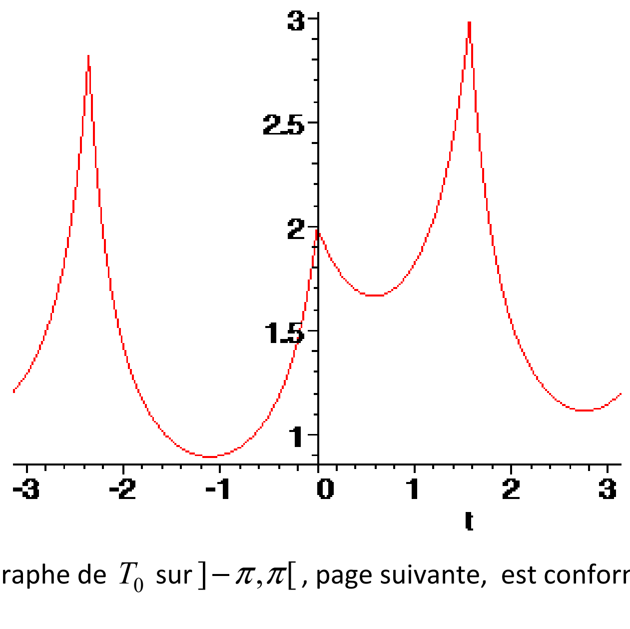
(iii) En faisant $t_1=0,$ on aboutit à $T_0(t_2)\le T_0(t_0)$ si $-\pi/2<t_0<0<t_2<\pi/2$.

(iiii) T_0 étant décroissante sur $]-\pi/2,0[$ et minorée, décroissante sur $]0,\pi/2[$ et majorée, a des limites *finies* à gauche et à droite de $t=0$, avec $T_0(0^+)\le T_0(0^-)$.

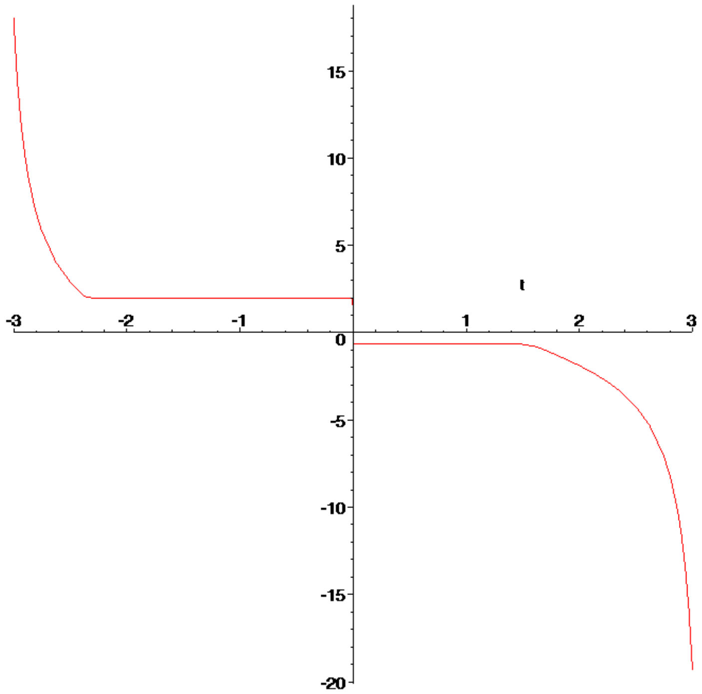
Exemple. Soit K le triangle plein fermé de sommets $A(2,0)$, $B(0,3)$ et $C(-2,-2)$. La fonction r est donnée par

$$r(t)=\begin{cases}6/(3\cos t+2\sin t)\ sur\ [0,\pi/2]\\ 6/(2\sin t-5\cos t)\ sur\ [\pi/2,\pi]\\ 2/(\cos t-2\sin t)\ sur\ [-3\pi/4,0]\\ 6/(2\sin t-5\cos t) sur\ [-\pi,-3\pi/4]\end{cases}$$

Le graphe de r sur $[-\pi,\pi]$ confirme la non dérivabilité en les trois sommets :



Le graphe de T_0 sur $]-\pi,\pi[$, page suivante, est conforme aux propriétés de la fonction :



et pose la question de savoir si T_0 ne serait pas tout bonnement décroissante sur $]-\pi,\pi[$.
L'horizontalité du graphe sur $[-\pi/2,\pi/2]$ s'explique par l'interprétation géométrique de T_0 donnée en début de **b)**.

c) dérivabilité en $t=0$

L'identité $r(t)-r(0)=\dfrac{r(0)(1-\cos t)+r(0)T(t)\sin t}{\cos t - T(t)\sin t}$ montre que r est dérivable à droite et à gauche en $t=0$,
avec $r'_d(0)=r(0)T_0(0^+)$ et $r'_g(0)=r(0)T_0(0^-)$, d'où $r'_d(0)\le r'_g(0)$.

La fonction r a donc en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. L'ensemble des réels t où la fonction r n'est pas dérivable est au plus dénombrable. *Nous terminons en donnant une application géomètrique de ce résultat d'analyse.*

3) Droites d'appui du convexe compact K

En tout point M du bord du convexe fermé K existe au moins une droite d'appui,
(http://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9paration_des_convexes)

une droite D qui contient M et telle que K est inclus dans l'un des demi-plans fermés de frontière D. Pour un disque, les droites d'appui sont les tangentes à la circonférence ; pour un carré, en chaque sommet passent une infinité de droites d'appui, les autre droites d'appui étant les côtés. Nous prouvons maintenant

r est dérivable en t si et seulement si existe une seule droite d'appui en $M(t)$

Il en résultera que l'ensemble des points exceptionnels du bord de K est au plus dénombrable.
(http://fr.wikipedia.org/wiki/Points_et_parties_remarquables_de_la_fronti%C3%A8re_d'un_convexe)

Démonstration.

Conformément à ce qui a été dit, on se borne toujours à $t=0$.
Soit D une droite d'appui en $M(0)$. D ne peut être horizontale sinon O serait sur D et K ne serait d'un même côté de D ; il en résulte que l'équation cartesienne de D est de la forme $x-r(0)=ay$.
Le demi-plan contenant K est d'inéquation $x-r(0)\le ay$, donc pour tout réel t, $r\cos t - r(0)\le ar\sin t$.

Pour $t\in]0,\pi[$, il vient donc $T(t)\le a$, tandis que pour $t\in]-\pi,0[$, on a $T(t)\ge a$; en faisant tendre t vers 0, on obtient l'encadrement pour a : $T_0(0^+)\le a\le T_0(0^-)$.

Pour établir la réciproque, prouvons une cinquième propriété sur la fonction T_0 :

(vi) $T_0(t)\le T_0(0^+)$ sur $[0,\pi[$ et $T_0(t)\ge T_0(0^-)$ sur $]-\pi,0]$.

Dans l'inégalité $\dfrac{r_1\cos t_1-r(0)}{r_1\sin t_1}\ge\dfrac{r_2\cos t_2-r(0)}{r_2\sin t_2}$ ($0<t_1<t_2<\pi$), fixons t_2 et faisons tendre t_1 vers 0 : il vient $\dfrac{r_2\cos t_2-r(0)}{r_2\sin t_2}\le\dfrac{r'_d(0)}{r(0)}$, puis $T_0(t)\le T_0(0^+)$ pour $t\in]0,\pi[$.

Partons maintenant de $\dfrac{r_0\cos t_0-r(0)}{r_0\sin t_0}\ge\dfrac{r_1\cos t_1-r(0)}{r_1\sin t_1}$, vraie si $-\pi<t_0<t_1<0$, fixons t_0 et faisons tendre t_1 vers 0 : on aboutit à $T_0(t)\ge T_0(0^-)$ sur $]-\pi,0[$.

Donc, si $T_0(0^+)\le a\le T_0(0^-)$, alors $a\le T_0(t)$ si $t\in]-\pi,0[$ et $a\ge T_0(t)$ quand $t\in]0,\pi[$ grâce à **(vi)**. On a alors $x-r(0)\le ay$ sur le bord de K et, par convexité, sur K tout entier, ce qui achève la démonstration. Quand r est dérivable en $t=0$, l'unique droite d'appui en $M(0)$ est la tangente en $M(0)$ au bord, d'équation

$$\left(x-r(0)\right)r(0)=y.r'(0).$$

Une application.

Nous prouvons que si N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et si S désigne la sphère unité :

N est différentiable sur S sauf sur une partie au plus dénombrable de S

Posons $K=\left\{x\in\mathbb{R}^2 : N(x)\le 1\right\}$: K est un convexe compact, O en est un point intérieur et $r(t)=1/N(e^{it})$.

On sait que r est dérivable sauf sur une partie dénombrable et

r dérivable en t équivaut à il existe une unique droite d'appui à K en $M(t)$.

On va prouver que N différentiable en x de S équivaut à il existe une unique droite d'appui en x à K.

a) N différentiable en x de S entraine qu'il existe une seule droite d'appui en x à K.

Pour x dans S, la différentielle l_x de N en x est une forme linéaire de norme 1 avec $l_x(x)=1$, ce qui induit $l_x\le 1$ sur S. En effet, on utilise une conséquence bien connue de la différentiabilité : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{N(x+ty)-N(x)}{t}=l_x(y)$ (qui lui est en fait équivalente, voir **[3]**). En choisissant $y=x$, $N(x)=\dfrac{N(x+tx)-N(x)}{t}\to l_x(x)$ et donc $l_x(x)=N(x)=1$. Comme $\dfrac{N(x+ty)-N(x)}{t}\le N(y)$ (le réel t est >0), on obtient $l_x(y)\le N(y)$; en changeant y en $-y$, il vient $\| l_x \|\le 1$. Avec $l_x(x)=N(x)=1$, On prouve ainsi que l_x est une droite d'appui de x en K.

Soit D une autre droite d'appui, d'équation $ax+by=c$, $c=ax_0+by_0$, donc on a soit $ax+by\le c$ si c positif soit $ax+by\ge c$ si c négatif sur K car O est dans K. Dans les deux cas, on divise par c qui n'est pas nul, et on obtient une forme linéaire qui vaut 1 en x, avec $l\le 1$ sur K. On prouve ensuite que $l=l_x$: on a déjà $N(x+h)-N(x)\ge l(x+h)-1=l(h)$, d'où $l(h)\le N(x+h)-N(x)=l_x(h)+o(N(h))$.

Il vient alors $l(h)\le l_x(h)+o(N(h))$; en changeant h en $-h$, on aboutit à $l=l_x$.

b) S'il existe une seule droite d'appui en x de S à K, N différentiable en x.
On trouvera une démonstration complète par le Pr J. Vauthier dans **[3].**

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*, chapitre 1.

[2] Daniel Saada, *Tribus et probabilités*, consultable sur

http://books.google.fr/books?printsec=frontcover&id=kq69nXaoV-AC#v=onepage&q&f=false

[3] Deuxième composition de l'Agégation 1979 : http://megamaths.perso.neuf.fr/annae.html
Epreuve corrigée par Jacques Vauthier, *Problèmes d'analyse, agrégation de Mathématiques, années 1970-1980*, publié en 1981 chez Masson, ISBN 978-2-225-74195-1.