# 27 - SOMMES DE RIEMANN DES FONCTIONS CONTINUES CROISSANTES

www.daniel-saada.eu

La somme de Riemann $S_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$ d'une fonction $f$ *continue et croissante* sur $[0,1]$ converge en étant supérieure à sa limite $\int_0^1 f(x)dx$ : il est naturel de se demander si $S_n(f)$ finit par décroître.

Les réponses à cette question sont les suivantes : $S_n(f)$ décroit à partir d'un certain rang si $f$ est de classe au moins $C^2$, cette assertion est fausse si $f$ est seulement $C^0$ ou $C^1$.

Pour le cas $C^0$, on donnera une contre-exemple ; pour le cas $C^1$, seule une preuve indirecte est fournie.
On supposera dans tout le texte $f$ non constante, ce qui équivaut à $f(1)>f(0)$.

**Notations**

On désignera par $E$ l'espace vectoriel des fonctions $f$ continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $N(f)=\max\limits_{[0,1]}|f|$ ; $(E,N)$ est un espace de Banach.

$E_1$ est le sous-espace des fonctions de $E$ qui sont de classe $C^1$ ; $E_1$ est dense dans $E$ pour la norme $N$.

On pose $D_n(f)=S_n(f)-S_{n+1}(f)$ ; chaque $D_n$ est une forme linéaire continue sur $E$.

Si $f$ est dans $E$, $F$ désignera *une* primitive de $f$ ; la quantité $\Delta_n(f)=D_n(F)$ ne dépend pas de la primitive $F$ choisie. Enfin, appelons $(\mathcal{P})$ l'implication suivante :

*si $f$ est continue et croissante, $S_n(f)$ est décroissante à partir d'un certain rang*

*(ce qui équivaut à $D_n(f)\geq 0$ à partir d'un certain rang).*

**1) $(\mathcal{P})$ est vraie pour toute $f$ au moins $C^2$**

Pour $f$ dans $E$, on posera $I(f)=\int_0^1 f(x)dx$.

Comme $f''$ est uniformément continue, pour tout $\varepsilon>0$, on aura $|f''(u)-f''(v)|\leq\varepsilon$ si $u$ et $v$ sont dans un segment $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ et $n$ est assez grand. Aussi, pour $x$ dans $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ et $k=1,2,\ldots,n$ :

$$-\varepsilon(x-k/n)^2/2\leq f(x)-f(k/n)-(x-k/n)f'(k/n)-(x-k/n)^2 f''(k/n)/2\leq\varepsilon(x-k/n)^2/2$$

(on s'appuie sur $f(x)=f(k/n)+(x-k/n)f'(k/n)+(x-k/n)^2 f''(c)/2$ avec $c$ entre $x$ et $k/n$).

On intègre sur $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ et on somme sur $k$ : $\left|I(f)-S_n(f)+\frac{1}{2n}S_n(f')+\frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right|\leq\frac{\varepsilon}{6n^2}$, ce qui signifie

$$S_n(f)=I(f)+\frac{1}{2n}S_n(f')+\frac{1}{6n^2}S_n(f'')+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

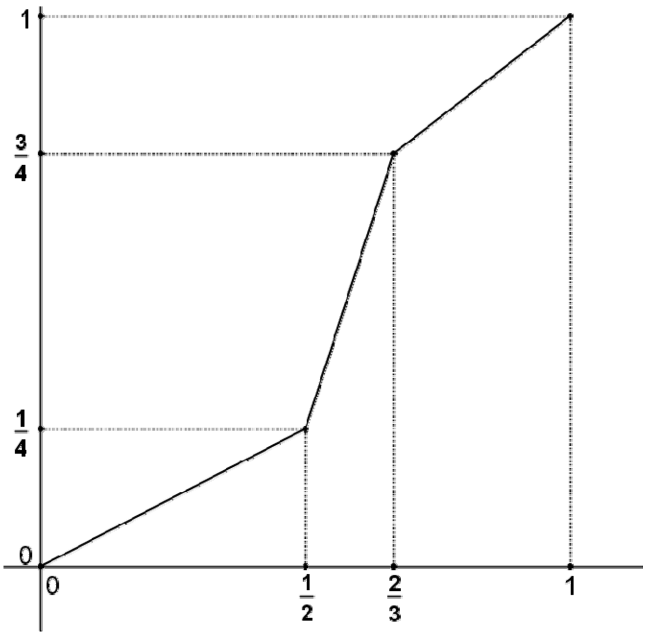
Un calcul analogue aurait donné, $f'$ étant $C^1$ : $S_n(f')=I(f')+\frac{f(1)-f(0)}{2n}+o(1/n)$, d'où

$$S_n(f)=I(f)+\frac{f(1)-f(0)}{2n}+\frac{b}{n^2}+o(1/n^2),\ b=I(f')/4+I(f'')/6$$

et $S_n(f)-S_{n+1}(f)$ équivalente à $\frac{f(1)-f(0)}{2n^2}$ ( $f(1)>f(0)$, d'où la décroissance de $S_n(f)$ à partir d'un d'un certain rang.

**2)** $(\mathcal{P})$ **peut être fausse si** $f$ **est seulement** $C^0$ **(Bruno Langlois)**

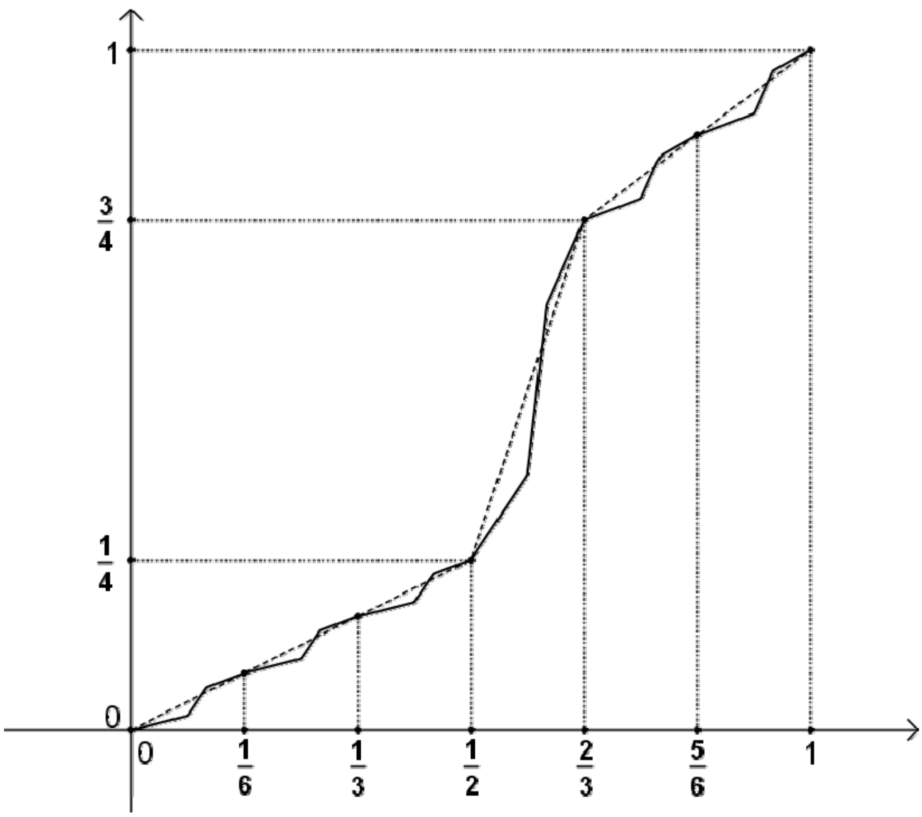
Soit $f_1$ la fonction affine par morceaux dont le graphe est :




On a $S_2(f_1)=5/8$, $S_3(f_1)=23/36$, et par conséquent $S_3(f_1)>S_2(f_1)$.

On construit par récurrence, en partant de $f_1$, une suite $(f_n)$ de fonctions affines par morceaux, continues et croissantes par : $f_{n+1}(x)=f_n\left(\dfrac{i}{6^n}\right)+f_1(6^n x-i)\left[f_n\left(\dfrac{i+1}{6^n}\right)-f_n\left(\dfrac{i}{6^n}\right)\right]$ quand $x\in\left[\dfrac{i}{6^n},\dfrac{i+1}{6^n}\right]$ et $0\le i<6^n$.

Voici à titre d'exemple le graphe de $f_2$ :



En particulier, $f_{n+1}\left(\frac{i}{6^n}\right)=f_n\left(\frac{i}{6^n}\right)$ parce que $f_1(0)=0$, et $f_{n+1}\left(\frac{i+1}{6^n}\right)=f_n\left(\frac{i+1}{6^n}\right)$ car $f_1(1)=1$.

Montrons à présent que la suite $f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $f$ continue et croissante.

D'abord, on prouve par récurrence que sur chaque intervalle $\left[\frac{i}{6^n},\frac{i+1}{6^n}\right]$, $|f_n(x)-f_n(y)|\le 1/2^n$. Si $x$ et $y$ sont dans $\left[\frac{i}{6^{n+1}},\frac{i+1}{6^{n+1}}\right]$ et si $i=6q+r$, alors $x$ et $y$ sont dans $\left[\frac{q}{6^n},\frac{q+1}{6^n}\right]$ et

$$f_{n+1}(x)-f_{n+1}(y)=[f_1(6^n x-q)-f_1(6^n y-q)]\left[f_n\left(\frac{q+1}{6^n}\right)-f_n\left(\frac{q}{6^n}\right)\right].$$

D'où $|f_{n+1}(x)-f_{n+1}(y)|\le\frac{1}{2^n}|f_1(6^n x-q)-f_1(6^n y-q)|$ et comme $6^n x-q$ et $6^n y-q$ sont dans $\left[\frac{r}{6},\frac{r+1}{6}\right]$, il vient $|f_{n+1}(x)-f_{n+1}(y)|\le\frac{1}{2^{n+1}}$ .

Ensuite, prouvons que $N(f_{n+1}-f_n)\le 1/2^{n-1}$. Si $x$ est dans un $\left[\frac{i}{6^n},\frac{i+1}{6^n}\right]$,

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=f_{n+1}(x)-f_{n+1}(i/6^n)+f_n(i/6^n)-f_n(x) \text{ , et donc}$$

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\le|f_{n+1}(x)-f_n(i/6^n)|+|f_n(i/6^n)-f_n(x)|\le f_n\left(\frac{i+1}{6^n}\right)-f_n\left(\frac{i}{6^n}\right)+\frac{1}{2^n}\le\frac{2}{2^n}.$$

Il en résulte que la suite $f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $f$, continue et croissante comme les $f_n$. Montrons que pour cette fonction $f$, $S_n(f)$ ne décroît *à partir d'aucun rang*.

**a)** si $x=p/6^q$, alors $f_n(x)=f_q(x)$ pour tout $n\ge q$ et donc $f(x)=f_q(x)$. Il en résulte que pour out $n$ :

$$S_{6^n/2}(f_n)=\frac{2}{6^n}\sum_{k=1}^{6^n/2}f_n\left(\frac{2k}{6^n}\right)=S_{6^n/2}(f) \text{ et } S_{6^n/3}(f)=S_{6^n/3}(f_n).$$

**b)** $S_{6^n/2}(f_n)=\dfrac{S_3(f_1)-1}{6^{n-1}}+S_{6^{n-1}}(f_{n-1})$

Par définition, $S_{6^n/2}(f_n)=\frac{2}{6^n}\sum_{1}^{3\times6^{n-1}}f_n\left(\frac{k}{3\times6^{n-1}}\right)=\frac{1}{6^{n-1}}\sum_{0}^{6^{n-1}-1}\frac{1}{3}\left[f_n\left(\frac{k+1/3}{6^{n-1}}\right)+f_n\left(\frac{k+2/3}{6^{n-1}}\right)+f_n\left(\frac{k+1}{6^{n-1}}\right)\right]$.

Or sur $\left[\frac{k}{6^{n-1}},\frac{k+1}{6^{n-1}}\right]$, $f_n(x)=f_{n-1}\left(\frac{k}{6^{n-1}}\right)+f_1(6^{n-1}x-k)\left[f_{n-1}\left(\frac{k+1}{6^{n-1}}\right)-f_n\left(\frac{k}{6^{n-1}}\right)\right]$ par construction.

Donc, $S_{6^n/2}(f_n)=\frac{1}{6^{n-1}}\sum_{0}^{6^{n-1}-1}\left\{\frac{1}{3}\left[f_1\left(\tfrac{1}{3}\right)+f_1\left(\tfrac{2}{3}\right)+f_1(1)\right]\left[f_{n-1}\left(\frac{k+1}{6^{n-1}}\right)-f_{n-1}\left(\frac{k}{6^{n-1}}\right)\right]+f_{n-1}\left(\frac{k}{6^{n-1}}\right)\right\}$,

et $S_{6^n/2}(f_n)=\frac{S_3(f_1)}{6^{n-1}}+\frac{1}{6^{n-1}}\sum_{0}^{6^{n-1}-1}f_{n-1}\left(\frac{k}{6^{n-1}}\right)=\frac{S_3(f_1)-1}{6^{n-1}}+S_{6^{n-1}}(f_{n-1})$.

**c)** $S_{6^n/3}(f_n)=\dfrac{S_2(f_1)-1}{6^{n-1}}+S_{6^{n-1}}(f_{n-1})$

En partant avec $S_{6^n/3}(f_n)=\frac{3}{6^n}\sum_{1}^{2\times6^{n-1}}f_n\left(\frac{k}{2\times6^{n-1}}\right)=\frac{1}{6^{n-1}}\sum_{0}^{6^{n-1}-1}\frac{1}{2}\left[f_n\left(\frac{k+1/2}{6^{n-1}}\right)+f_n\left(\frac{k+1}{6^{n-1}}\right)\right]$, on aboutit sans difficultés à $S_{6^n/3}(f_n)=\frac{S_2(f_1)}{6^{n-1}}+\frac{1}{6^{n-1}}\sum_{0}^{6^{n-1}-1}f_{n-1}\left(\frac{k}{6^{n-1}}\right)=\frac{S_2(f_1)-1}{6^{n-1}}+S_{6^{n-1}}(f_{n-1})$.

On a donc $S_{6^n/2}(f_n)-S_{6^n/3}(f_n)=\dfrac{S_3(f_1)-S_2(f_1)}{6^{n-1}}>0$.

**3) $(\mathcal{P})$ est fausse si $f$ est $C^1$ (Alain Rémondière)**

On raisonne par l'absurde en supposant $(\mathcal{P})$ vraie pour toute $f$ croissante $C^1$.

**a) il existe une constante $K$ telle que, pour toute $f$ $C^1$ et tout $n>1$, $|D_n(f)|\le K.N(f')/n^2$**

$(\mathcal{P})$ vraie veut dire que $\forall f$ croissante et $C^1$, $D_n(f)=S_n(f)-S_{n+1}(f)\ge 0$ à partir d'un certain rang.
Soit alors $H_n=\{f\in E:\forall k\ge n,\Delta_k(F)\ge 0\}$ : $H_n$ est fermé dans $E$ car chacune des formes linéaires $f\to\Delta_k(F)$ est continue. La réunion des $H_n$ contient toutes les $f$ positives car leurs primitives $F$ sont $C^1$ et croissantes.
Le cône des $f$ positives est d'intérieur non vide car $\{f\in E:f>0\}$ est un ouvert ($f>0$ implique $f\ge m>0$ et donc $B(f,m/2)$ est dans le cône).
Comme $(E,N)$ est complet, le Théorème de Baire assure que l'un des $H_n$ est d'intérieur non vide ; comme les fonctions $C^1$ sont denses dans $(E,N)$, il existe $f$ $C^1$ et $a>0$ tels que $B(f,a)$ reste dans $H_n$. Il en résulte que $g\in E$ et $N(g)<a$ impliquent $f+g$ est dans $H_n$, d'où $\Delta_k(F+G)\ge 0$ pour tout $k\ge n$ ; en changeant $g$ en $-g$, on aboutit à $|\Delta_k(G)|\le\Delta_k(F)$ quand $k\ge n$ et $N(g)<a$. Par linéarité, $|\Delta_k(G)|\le\Delta_k(F).N(g)/a$ pour toute $g$ dans $E$. Mais $F$ étant $C^2$, on sait que $\Delta_k(F)\le K/k^2$, d'où $|\Delta_k(G)|\le K.N(g)/k^2$ pour tout $k\ge n$ et $g$ dans $E$
Si on pose $f=G$, on a le résultat annoncé pour $k\ge n$ car $f'=g$ ; les entiers $k$ plus petits que $n$ étant en nombre fini, on a, avec une autre constante $K$, $|\Delta_k(G)|\le K.N(g)/k^2$ pour tout $k$.

**b) $(\mathcal{P})$ est fausse**

Soit $f_n$ définie par :
$f_n$ est nulle sur $[0,1/(n+1)]\cup[n/(n+1),1]$,
$f_n$ vaut $\left(x-\dfrac{k}{n+1}\right)^2\left(x-\dfrac{k+1}{n+1}\right)^2$ sur $\left[\dfrac{k}{n+1},\dfrac{k+1}{n+1}\right]$, $k$ allant de $1$ à $n-1$ ; $f_n$ est $C^1$.
Par construction, $S_{n+1}(f_n)=0$ et $D_n(f_n)=S_n(f_n)$ ; comme $k\le n$, $\dfrac{k}{n}\in\left[\dfrac{k}{n+1},\dfrac{k+1}{n+1}\right]$ et donc :

$$S_n(f_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_n(k/n)=\frac{1}{n^5(n+1)^4}\sum_{k=1}^{n}k^2(n-k)^2=\frac{n(n+1)(n^3-n^2+n-1)}{30n^5(n+1)^4}=\frac{n^3-n^2+n-1}{30n^4(n+1)^3}.$$

$D_n(f_n)$ équivaut donc à $1/30n^4$.

**Calcul de $N(f'_n)$**

Si $h(x)=(x-a)^2(x-b)^2$, $h'(x)=2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$ et $h''(x)=(2x-a-b)^2+2(x-a)(x-b)$ est un trinôme qui s'annule pour $x=\dfrac{a+b}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}(b-a)$, d'où $\max\limits_{[a,b]}|h'|=\dfrac{\sqrt{3}(b-a)^3}{9}$. On en déduit que

$$N(f'_n)=\frac{\sqrt{3}}{9(n+1)^3}$$ et donc que $N(f'_n)$ est équivalente à $\sqrt{3}/9n^3$ quand $n\to\infty$.

**Pour $n$ assez grand, $|D_n(f_n)|\le K.N(f'_n)/n^2$ n'est vérifiée pour aucun $K$.**

**COMPLÉMENTS**

**1)** Il y a équivalence entre les trois assertions suivantes :

$(i)$ $(\mathcal{P})$ est vraie (pour toute fonction $C^1$)

$(ii)$ Il existe une constante $K$ telle que, pour toute $f$ $C^1$ et tout $n > 1$, $|D_n(f)| \le K.N(f')/n^2$

$(iii)$ Pour toute $f$ $C^1$, $\lim_n n^2 D_n(f) = \dfrac{f(1)-f(0)}{2}$.

Nous savons que $(i)$ implique $(ii)$. Il est évident que $(iii)$ implique $(i)$ puisque $f(1) > f(0)$.

Reste à montrer $(ii)$ implique $(iii)$.

Nous partons du fait que $(iii)$ est vraie pour $f$ $C^2$ puis nous opérons par densité.

On se donne $f$ $C^1$ : il existe $g$ $C^2$ telle que $N(f-g) \le \varepsilon$ et alors

$$\left|n^2 D_n(f) - \frac{f(1)-f(0)}{2}\right| \le \left|n^2 D_n(f) - n^2 D_n(g)\right| + \left|n^2 D_n(g) - \frac{g(1)-g(0)}{2}\right| + \left|\frac{g(1)-g(0)}{2} - \frac{f(1)-f(0)}{2}\right|.$$

$g$ étant fixée, $\left|n^2 D_n(g) - \dfrac{g(1)-g(0)}{2}\right| \le \varepsilon$ à partir d'un certain rang $n_1$ ;

$\left|\dfrac{g(1)-g(0)}{2} - \dfrac{f(1)-f(0)}{2}\right| \le N(f-g) \le \varepsilon$ ;

$\left|n^2 D_n(f) - n^2 D_n(g)\right| = \left|n^2 D_n(f-g)\right| \le M/n^2 \le \varepsilon$ à partir d'un certain rang $n_2$.

Pour $n \ge \max(n_1, n_2)$, $\left|n^2 D_n(f) - \dfrac{f(1)-f(0)}{2}\right| \le 3\varepsilon$, ce qui établit $(iii)$ à partir de $(ii)$.

**2)** Comme $(\mathcal{P})$ est fausse, il existe au moins une fonction $f$ $C^1$ telle que la limite de $n^2 D_n(f)$ n'est pas $\dfrac{f(1)-f(0)}{2}$, soit que $n^2 D_n(f)$ n'ait pas de limite , soit que $\lim_n n^2 D_n(f) \ne \dfrac{f(1)-f(0)}{2}$.

Nous montrons que c'est la première piste qui est la bonne car si $n^2 D_n(f)$ converge, c'est vers $\dfrac{f(1)-f(0)}{2}$.

Soit $L$ la limite, éventuelle, de $n^2 D_n(f)$ : si $L$ est non nulle, $D_n(f)$ est équivalent à $L/n^2$ et on sait alors que $\sum_n^\infty D_k(f) \sim L \sum_n^\infty 1/k^2 \sim L/n$ ; comme $\sum_n^\infty D_k(f) = S_n(f) - I(f)$, $L = \dfrac{f(1)-f(0)}{2}$. Si $L = 0$, alors $D_n(f) = o(1/n^2)$ et on aurait $S_n(f) - I(f) = o(1/n)$ ce qui suppose implique $f(1) = f(0)$ d'après **1)**, d'où encore $\lim_n n^2 D_n(f) = \dfrac{f(1)-f(0)}{2}$.

**On en arrive donc à la conclusion qu'il existe $f$ $C^1$ telle que $n^2 D_n(f)$ ne converge pas.**

*********************************************************************************