26 - PROBABILITÉS SUR LE PLAN NORMÉ

www.daniel-saada.eu

Rappelons cette conséquence du théorème de la classe monotone (**[6]**, **§** 6.3, **p.** 105) : si p et q sont deux probabilités sur la tribu des boréliens du plan telles que $p(I\times J)=q(I\times J)$ pour tous les intervalles I et J, alors $p=q$.
En effet, la famille des produits $I\times J$ est stable par intersection finie et engendre la tribu des boréliens.
Comme on peut supposer I et J bornés et le plan muni d'une base orthonormée, on peut dire de façon imagée que si deux probabilités coïncident sur les rectangles de côtés parallèles aux axes, alors elles sont égales sur les boréliens du plan.
Il est naturel de se demander si ce résultat subsiste quand les deux probabilités sont égales sur certains éléments : les carrés au lieu des rectangles, les demi-plans, les disques pour une norme donnée, familles qui pour certaines engendrent les boréliens mais dont aucune n'est stable par intersection.

Soit p et q deux probabilités égales sur les boules d'un espace normé E : l'ensemble des boréliens de E pour lesquels $p=q$ est une famille monotone. Si la famille monotone engendrée par les boules est la tribu des boréliens de E alors $p=q$ sur tous les boréliens : il en est ainsi si E est euclidien **[1]**. Quand la norme sur E, de dimension finie, ne provient pas d'un produit scalaire, on démontre que $p=q$ sans que la famille monotone engendrée par les boules coïncide toujours avec les boréliens.

Le but de cet article est de prouver ce résultat en dimension 2 : il existe en effet dans ce cas une démonstration assez géométrique qu'il m'a paru intéressante de faire connaître. La détermination des sous-ensembles de boréliens pour lesquels $p=q$ quand p et q coïncident sur ces ensembles est un sujet de recherche actif **[4]**.

Dans tout ce qui suit, p et q désignent deux probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$.

PARTIE A $-$ $p=q$ sur les carrés (ouverts ou fermés) de cotés parallèles aux axes implique $p=q$

$p=q$ sur les carrés ouverts équivaut à $p=q$ sur les carrés fermés. En effet, tout carré fermé est une intersection décroissante dénombrable de carrés ouverts, tout carré ouvert est réunion croissante d'une suite de carrés fermées.
On dira simplement que p et q sont égales sur les carrés («parallèles» aux axes).

Désignons par $Q(a,b)$ le quart de plan défini par $(x\geq a \ et \ y\geq b)$: $Q(a,b)$ est la réunion croissante des carrés fermés $[a,a+n]\times[b,b+n]$. Il en résulte que $p=q$ sur tous les $Q(a,b)$. Comme cette famille est stable par intersection et engendre les boréliens, $p=q$.

Deuxième démonstration, qui témoigne de la grande ingéniosité de son auteur, le professeur Jean-Louis Tu :
il montre directement que $p=q$ sur tous les rectangles fermés, ce qui suffit. Voici comment : supposons que le rectangle soit $R=[0,b]\times[-a,a]$; pour $n=4m+2$, on recouvre R par la réunion finie *disjointe* A_n suivante

$$A_n=\left[0,\frac{2b}{n}\right]\times\left[-a-\frac{b}{n},a+\frac{b}{n}\right]+\left]\frac{2b}{n},\frac{4b}{n}\right[\times\left]-a-\frac{b}{n},a+\frac{b}{n}\right[+\ldots+\left[2m\frac{2b}{n},b\right]\times\left[-a-\frac{b}{n},a+\frac{b}{n}\right]$$

composée de $(2m+1)$ carrés dont $(m+1)$ sont fermés et m ouverts. On a donc $p(A_n)=q(A_n)$.
Comme $R=\bigcap_n A_n$, $p(R)=q(R)$.

PARTIE B – $p = q$ **sur les demi-plans implique** $p = q$ **sur les boréliens**

Par hypothèse, on a au moins $p(ax+by \le c) = q(ax+by \le c)$ et $p(ax+by < c) = q(ax+by < c)$ **(H)**

Nous allons utiliser le résultat fondamental que constitue l'injectivité de la transformation de Fourier :

Si p *et* q *sont deux probabilités sur* $\mathbb{R}^n$ *et si, pour tout vecteur* t *de* $\mathbb{R}^n$, $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} dp(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} dq(x)$, *alors* $p = q$, (t,x) *désignant le produit scalaire usuel dans* $\mathbb{R}^n$, $(t,x) = \sum_1^n t_i x_i$ *avec des notations évidentes.*

En voici deux démonstrations en ligne :
http://www.les-mathematiques.net/a/i/f/node2.php3 (pour les mesures) ;
http://math.univ-lille1.fr/~bouclet/Transformee-de-Fourier.pdf (pour les fonctions).

En particulier, si U et V sont deux variables aléatoires *réelles* sur $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, $E\left[e^{itU}\right] = E\left[e^{itV}\right]$ pour tout réel t implique que U et V ont même loi. En effet, d'après le théorème du transfert, $E\left[e^{itU}\right] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{itx} dp_U(x)$ et $E\left[e^{itV}\right] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{itx} dp_V(x)$, p_U étant la loi de U et p_V la loi de V.

Remarque. Dans l'implication $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} dp(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} dq(x) \Rightarrow p = q$, il suffit que l'égalité ait lieu sur un ensemble *dense* de vecteurs t de $\mathbb{R}^n$. En effet, le théorème de convergence dominée de Lebesgue prouve que si $t_n \to t$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} dp(x) = \lim_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t_n,x)} dp(x) \text{ et } \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} dq(x) = \lim_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t_n,x)} dq(x)$$

car la suite des fonctions *uniformément bornées* $x \to e^{i(t_n,x)}$ converge vers $x \to e^{i(t,x)}$.

1) On va prouver que $\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(ax+by)} dp(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(ax+by)} dq(x,y)$ pour tout (a,b) : on en déduira $p = q$ puisque $ax+by$ est le produit scalaire de $t = (a,b)$ par (x,y).

Il suffit donc de prouver que l'ensemble $X(a,b)$ des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(ax+by)dp = \int_{\mathbb{R}^2} f(ax+by)dq$$

contient la fonction $t \to e^{it}$ pour tout (a,b). Encore faut-il que la fonction $(x,y) \to f(ax+by)$ soit intégrable à la fois pour p et q, aussi limitera-t-on $X(a,b)$ aux fonctions mesurables et bornées.

2) Fixons un (a,b) et abrégeons $X(a,b)$ en X.

X est un espace vectoriel qui contient les constantes ; d'après **(H)**, X contient $f = 1_{]-\infty,c]}$ pour tout réel c puisque

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(ax+by)dp = \int_{ax+by \le c} 1\,dp = p(ax+py \le c).$$

Montrons, par deux méthodes, l'une ensembliste et l'autre probabiliste, que X contient toutes les fonctions indicatrices 1_B quand B est borélien. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des boréliens A de $\mathbb{R}$ tels que $1_A \in X$:

– $\mathcal{E}$ est une famille monotone. $\mathcal{E}$ contient $\mathbb{R}$ parce que p et q ont même masse, $\mathcal{E}$ est stable par différence $B-A$ quand $A\subset B$ en raison de l'égalité $1_{B-A}=1_B-1_A$ et de la linéarité de l'intégrale ; reste la stabilité de $\mathcal{E}$ par réunion croissante dénombrable. Si $A=\bigcup_n A_n$ avec (A_n) dans $\mathcal{E}$ et croissante, alors $1_{A_n}\to 1_A$ et $1_{A_n}\leq 1_A$, et $A\in\mathcal{E}$ par un passage à la limite justifié par le théorème de convergence monotone de Beppo-Levi.
$\mathcal{E}$ contient donc la famille monotone engendrée par les $1_{]-\infty,c]}$: comme les $1_{]-\infty,c]}$ sont stables par intersection, la famille monotone engendrée est la tribu engendrée, et cette tribu est la tribu des boréliens.

– introduisons la variable aléatoire $Z=aX+bY$, où $X(x,y)=x$ et $Y(x,y)=y$. Comme on a l'équivalence $1_A\in X \Leftrightarrow p\left(Z^{-1}(A)\right)=q\left(Z^{-1}(A)\right)$, les probabilités $p_Z=p\circ Z^{-1}$ et $q_Z=q\circ Z^{-1}$ sont égales sur les intervalles $]-\infty,c]$, donc sur tous les boréliens de $\mathbb{R}$ puisque ces intervalles sont stables par intersection finie et engendrent les boréliens.
Une fois ce point acquis , l'espace vectoriel X contient par linéarité toutes les fonctions étagées sur la tribu des boréliens. Ensuite, X contient toutes les fonctions *positives* mesurables bornées qui sont des limites uniformes sur $\mathbb{R}$ de fonctions étagées, puis les fonctions f mesurables bornées grâce à $f=f^+-f^-$, donc la fonction $t\to e^{it}$.

DEUXIÈME DÉMONSTRATION

Soit p une probabilité sur un espace vectoriel normé X muni de sa tribu borélienne et X' son dual topologique, ensemble des formes linéaires continues sur X (en dimension finie, toute forme linéaire est continue).
Quand $L\in X'$, on pose $\hat{p}(L)=\int_X e^{i.L(x)}dp(x)$, la fonction $\hat{p}$ s'appelant la transformée de Fourier de p ; en dimension finie, toute forme linéaire peut certes s'écrire $x\to(t,x)$, mais cette écriture est réductrice et dommageable. La transformation de Fourier étant injective, $\hat{p}=\hat{q}$ sur X' implique $p=q$.
Il est facile de vérifier que $p\circ L^{-1}$, définie par $B\to p\left(L^{-1}(B)\right)$, est une probabilité sur la tribu des boréliens B de $\mathbb{R}$ (on reconnaît la loi de probabilité de L). D'après le théorème du transfert, si f est une fonction mesurable et bornée (pour simplifier) définie sur $\mathbb{R}$

$$\int_X (f\circ L)dm=\int_{\mathbb{R}} f\,d(m\circ L^{-1}).$$

On en déduit, avec $f(t)=e^{it}$, que si $p\circ L^{-1}=q\circ L^{-1}$, alors $\hat{p}(L)=\hat{q}(L)$. Par conséquent, pour établir $p=q$, il suffit de montrer que $p\circ L^{-1}=q\circ L^{-1}$ pour *toute* $L\in X'$. Désormais, on suppose X de dimension finie.
Un demi-espace ouvert est définie par une inéquation $L>a$; par hypothèse, $p(L>a)=q(L>a)$ pour toute L et tout réel a, autrement dit $p\circ L^{-1}=q\circ L^{-1}$ sur les intervalles $]a,+\infty[$. Cela suffit pour que $p\circ L^{-1}=q\circ L^{-1}$, et ceci pour toute L.

PARTIE C – $p=q$ sur les disques euclidiens (ouverts ou fermés) implique $p=q$

$p=q$ sur les disques ouverts équivaut à $p=q$ sur les disques fermés. En effet, toute disque fermé est une intersection décroissante dénombrable de disques ouverts, tout disque ouvert est réunion croissante d'une suite de disques fermés. On dira que p et q sont égales sur les disques du plan.

$p=q$ sur les disques implique $p=q$ sur les demi-plans

Un demi-plan ouvert est une réunion croissante dénombrable de disques ouverts. En effet, supposons que le demi-plan soit celui défini par l'inégalité $x>0$: il est la réunion croissante des disques ouverts de centre $(n,0)$ et de rayon n. Il en résulte que $p=q$ sur tous les demi-plans ouverts ; c'est encore vrai sur les demi-plans fermés, on dira

que $p=q$ sur les demi-plans. (Par différence, $p=q$ sur les droites, mais ce fait ne sera pas exploité.)
D'après **B**, $p=q$ sur les boréliens du plan.

Un carré de cotés parallèles aux axes est un disque pour la norme $(x,y)\to\max(|x|,|y|)$, la norme euclidienne étant définie par $\sqrt{x^2+y^2}$: on a prouvé que $p=q$ sur les disques implique $p=q$ dans le cas des normes max ou euclidienne. D'où la *question* légitime : a-t-on encore $p=q$ si p et q coïncident sur les disques d'une norme $N_\alpha(x,y)=\left(|x|^\alpha+|y|^\alpha\right)^{1/\alpha}$ ($\alpha\geq 1$), voire d'une norme quelconque? La réponse est *oui*, nous le démontrons d'abord dans le cas où la norme est différentiable en tout vecteur non nul : c'est le cas de la norme euclidienne, de toutes les normes N_α, mais pas de la norme $\max$ (qui correspond à $\alpha=+\infty$), puis dans le cas où la norme comporte un point de non-différentiabilité.

*Remarque***.** Une norme N en dimension finie est différentiable *presque partout* car c'est une fonction convexe (*Calcul différentiel*, Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation, Nicolas Tosel et Stéphane Gonnord , Ellipses Marketing, 1998), ou bien en vertu d'un Théorème de Rademacher . Comme un ensemble de mesure nulle ne contient pas d'ouvert non vide, il en résulte que N est différentiable sur une partie *dense* de la sphère unité S . En dimension 2 tout au moins, l'ensemble des points de S en lesquels N n'est pas différentiable est *au plus dénombrable* **[5]**.

PARTIE D – $p=q$ sur les disques d'une norme différentiable implique $p=q$

$\mathbb{R}^2$ est muni d'une norme N différentiable en tout x non nul. On désigne par B la boule ouverte $B(0,1)$, par B' la boule fermée $B'(0,1)$, par S la sphère $B'-B$. On suppose que $p=q$ sur toutes les N - boules.

1) Détermination des différentielles de N sur S

Nous prouvons :

a) si x est dans S, la différentielle l_x de N en x est une forme linéaire de norme 1 avec $l_x(x)=1$, ce qui induit $l_x\leq 1$ sur S.

b) réciproquement, si l est une forme linéaire de norme 1 et si $l(x)=1$ pour un x de S (ce x existe par compacité) alors $l=l_x$.

Ainsi, l'ensemble des l_x quand x décrit S est la sphère unité du dual de $\mathbb{R}^2$.

Preuves :

a) on utilise une conséquence bien connue de la différentiabilité : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{N(x+ty)-N(x)}{t}=l_x(y)$ (qui lui est en fait équivalente, voir **[2]**). En choisissant $y=x$, $N(x)=\dfrac{N(x+tx)-N(x)}{t}\to l_x(x)$ et donc $l_x(x)=N(x)=1$.

Comme $\dfrac{N(x+ty)-N(x)}{t}\leq N(y)$ (le réel t est >0), on obtient $l_x(y)\leq N(y)$; en changeant y en $-y$, il vient $\|l_x\|\leq 1$. Avec $l_x(x)=N(x)=1$, le **a)** est prouvé.

b) on a $\dfrac{N(x+ty)-N(x)}{t}\geq\dfrac{l(x+ty)-1}{t}=l(y)$, d'où $l_x(y)\geq l(y)$; en changeant y en $-y$, il vient $l=l_x$.

2) p et q coïncident sur tous les demi-plans d'équation $l_a<0$, a décrivant S

En effet, $(l_a<0)=\bigcup_{n=1}^{\infty}B(-na,n)$:

i) si x est dans la réunion, il existe n tel que $N(x+na)<n$, donc $l_a(x+na)<n$ et $l_a(x)<0$.

ii) si x n'est pas dans cette réunion, $N(x+na)\geq n$ pour tout n et donc $N(x/n+a)\geq 1$. En développant à l'ordre 1 ($1/n$ tend vers 0) : $N(x/n+a)-1=N(x/n+a)-N(a)=l_a(x/n)+o(N(x/n))$; on a donc pour tout n

$$l_a(x/n)+o(N(x/n))\geq 0$$

d'où $l_a(x)\geq 0$.

Ainsi, tous les demi-plans ouverts d'équation $l_a<0$ sont des réunions dénombrable *croissantes* de boules ouvertes car $B(-na,n)\subset B(-(n+1)a,n+1)$. Il en résulte que $p=q$ sur ces demi-plans.

3) p **et** q **coïncident sur tous les demi-plans dont la frontière contient** 0

Un demi-plan ouvert (P) dont la frontière contient l'origine est défini par une inéquation $l<0$ ou $l>0$, où l est une forme linéaire non nulle. Comme $p=q$ sur $l>0$ équivaut à $p=q$ sur $l<0$, on supposera que $l<0$ définit (P).

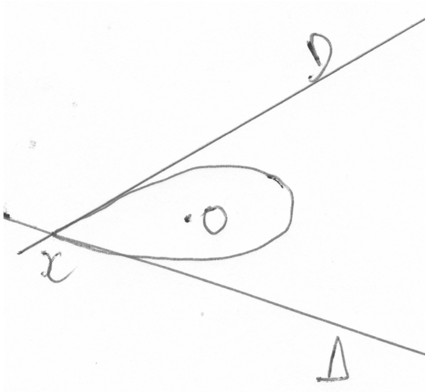
On peut supposer l de norme 1 car $l<0$ équivaut à $\dfrac{l}{\|l\|}<0$: l atteint son maximum sur le compact S (c'est là qu'intervient l'hypothèse de dimension finie) et il existe donc $a\in S$ tel que $l(a)=1$. On sait alors que l est la différentielle l_a, aussi (P) est repéré par $l_a<0$ et p et q coïncident en valeur sur (P).

4) p **et** q **coïncident sur tous les demi-plans**

Soit (P) un demi-plan ouvert quelconque, choisissons un point A sur sa droite frontière et traçons une boule de centre A : (P) est alors un demi-plan dont la frontière passe par le centre de la boule. En vertu de **3)**, p et q sont égales sur (P). **La partie B** nous enseigne alors que p et q sont égales sur tous les boréliens du plan.

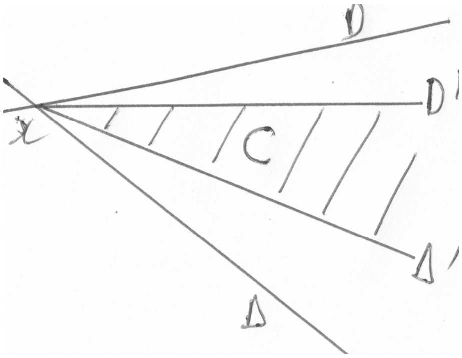
PARTIE E – $p=q$ sur les disques d'une norme N quelconque implique $p=q$

Soit x un point de S en lequel N n'est pas différentiable. Il existe alors deux droites d'appui D et Δ en x à S, la boule B' étant dans le cône convexe fermé K de sommet x délimité par D et Δ et contenant O :



Soit C le cône ouvert convexe défini par $C=\bigcup_{n=0}^{\infty}B(-nx;n+1)$: cette réunion de boules est croissante car $N(x)=1$. On a donc $p(C)=q(C)$; plus généralement, si u est un vecteur du plan, $p(u+C)=q(u+C)$ car $u+C$ est la réunion croissante des boules $B(u-nx_0;n+1)$.

Par homothéties de centre x, chacune des boules $B(-nx_0;n+1)$ est dans K, leur réunion aussi, et donc le cône convexe C est un cône (x,D',Δ') :



On a donc $p = q$ sur tous les translatés de (x, D', Δ') et on est alors ramené à la situation décrite dans le deuxième paragraphe de la **Partie A**. En conclusion :

Deux probabilités qui coïncident sur les disques d'un plan normé sont égales.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Frédéric Gaunard, *Boules, mesures et boréliens*, http://www.math.u-bordeaux1.fr/~fgaunard/memoire07.pdf

[2] Deuxième composition de l'Agrégation 1979, http://megamaths.perso.neuf.fr/annae.html

[3] Jacques Vauthier, *Problèmes d'analyse, agrégation de Mathématiques, années 1970-1980*, Masson, 1981.

[4] Inder K. Rana, http://www.springerlink.com/content/q2xuv77282802758/, lire l'introduction en bas de page.

[5] Daniel Saada, http://www.daniel-saada.eu/fichiers/29-Convexes_compacts_du_plan.pdf.

[6] Daniel Saada, http://books.google.fr/books?printsec=frontcover&id=kq69nXaoV-AC#v=onepage&q&f=false