20 - CONNEXITÉ ET COMPACITÉ

www.daniel-saada.eu

1) Dans un compact, toute composante connexe est l'intersection des fermés-ouverts qui la contiennent

Soit C une composante connexe d'un espace topologique compact K, $\left(K_i(C)\right)_{i\in I}$ la famille des fermés-ouverts de K qui contiennent C et $K(C)$ l'intersection de tous ces fermés-ouverts. $K(C)$ est fermée comme intersections de fermés, donc compacte, et la famille des $K_i(C)$ est stable par intersection finie.

a) *C est incluse dans $K(C)$*

La raison en est que $C\subset K_i(C)$ pour tout i de I. En effet, si C rencontrait aussi le complémentaire d'un $K_i(C)$, qui est un fermé-ouvert, C ne serait pas connexe.

b) *$K(C)$ est égale à C*

Il suffit de montrer que $K(C)$ est connexe.

On raisonne par l'absurde en supposant que $K(C)$ est la réunion de deux fermés-ouverts disjoints *non vides* F_1 et F_2. Comme $K(C)$ est fermée, F_1 et F_2 sont *fermés dans* K ; de ce fait, ils sont séparées par deux ouverts disjoints U_1 et U_2 : $F_1\subset U_1$, $F_2\subset U_2$, $U_1\cap U_2=\varnothing$. Supposons que C est dans F_1 et donc dans U_1. Le compact $K(C)$ étant disjoint du fermé complémentaire de l'ouvert $U=U_1\cup U_2$, il existe un fermé-ouvert $K_i(C)\subset U$: partir de $\bigcap_i\left(K_i(C)\cap\overline{U}\right)=\varnothing$ et utiliser la propriété de l'intersection finie.

Mais alors $K_i(C)\cap U_1$ est un fermé-ouvert de K contenant C tandis que $K(C)$ n'est pas inclus dans $K_i(C)\cap U_1$ (ouvert car intersection de deux ouverts, fermé car $K_i(C)\cap U_1=K_i(C)\cap(K-U_2)$ est une intersection de deux fermés). Cette contradiction montre que $K(C)$ est connexe.

En particulier, la composante connexe d'un point x de K est l'intersection des fermés-ouverts qui contiennent x.

2) Si K est compact et connexe, tout point a de K est adhérent à chaque composante connexe de $K-\{a\}$

Commençons par le cas simple où $K-\{a\}$ est connexe (ce qui arrive au moins deux fois, voir **4**) : si a n'était pas adhérent à $K-\{a\}$, il existerait un voisinage ouvert $v(a)$ disjoint de l'ouvert $K-\{a\}$ et K ne serait pas connexe.

Passons maintenant au cas général.

Soit C une composante connexe de $K-\{a\}$: C est fermée dans $K-\{a\}$. Si a n'est pas adhérent à C, C est fermée dans K. Comme C est compacte, il existerait deux ouverts U et V de K séparant a et C, $a\in V$.

C étant aussi une composante connexe du compact $K-V$, C est l'intersection des ouverts-fermés de $K-V$ qui contiennent C. Ces fermés-ouverts sont des compacts d'intersection C : comme C est incluse dans l'ouvert U, il existe un compact F ouvert dans $K-V$ tel que $C\subset F\subset U$.

Le fermé-ouvert F étant contenu dans le fermé $K-V$, F est fermé dans K. F est également l'intersection d'un ouvert O de K avec $K-V$: $F=O\cap(K-V)$.

Comme $F=F\cap U$, $F=(O\cap U)\cap(K-V)=O\cap U$, car $U\subset K-V$: F est donc un ouvert de K.

F n'étant ni vide (il contient C) ni égal à K (il ne contient pas a), c'est contradictoire avec la connexité de K.

On a donc prouvé que a est adhérent à C.

3) Contre-exemple quand K connexe n'est pas compact (Michel Wirth)

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit T_n le triangle isocèle dont les sommets sont les points de coordonnées $(0,1)$, $\left(n,\dfrac{1}{n+1}\right)$,

$\left(-n,\dfrac{1}{n+1}\right)$. On note E la réunion des T_n : $E=\bigcup_{n=0}^{\infty}T_n$.

L'adhérence K de E dans $\mathbb{R}^2$ est constituée de la réunion de E et des deux droites d'équations $y=1$, $y=0$.
Comme E est connexe par arcs, son adhérence K est connexe et fermée, mais non bornée, donc non compacte.
Si l'on retire de K le point $A=(0,1)$, il apparaît une famille dénombrable de composantes connexes et le point A n'est pas adhérent à l'une d'entre elles : l'axe $y=0$.
Justifions.
$K-A$ est la réunion disjointe de la somme des T_n-A, de la droite D d'équation $y=0$, des demi-droites d_1 et d_2 définies par $y=1$ et $x\neq 0$, lesquels sont tous connexes dans $K-A$.
Chaque triangle épointé T_n-A est ouvert et fermé, tandis que D, d_1, d_2 sont fermées sans être ouvertes.

a) *Chaque T_n-A est une composante connexe de $K-A$*
Il en est ainsi chaque fois qu'une partie connexe C est fermée-ouverte. En effet, soit $x\in C$ et soit $C(x)$ la composante connexe de x : $C(x)$ contient C et alors C est à la fois ouverte et fermée dans $C(x)$, il en résulte $C=C(x)$.

b) *Les autres composantes connexes de $K-A$ sont D, d_1 et d_2*
Les composantes connexes formant une partition de l'espace, on examine le statut des connexes d_1,d_2,D : comme d_1,d_2,D sont fermés et disjoints, d_1+d_2, d_1+D, d_2+D , d_1+d_2+D ne sont pas connexes, donc on conclut que d_1,d_2,D sont les trois composantes connexes manquantes.

Complément. Soit E connexe et séparé et x un point de E : si A est un fermé-ouvert de $E-\{x\}$ alors $adh(A)=A\cup x$ et $adh(A)$ est connexe.

4) Tout compact connexe séparé non réduit à un point possède au moins deux points de non-coupure

Un point c d'un espace connexe E est dit de coupure (« cut point » en anglais) si $E-\{c\}$ n'est pas connexe.
Si $E=\mathbb{R}$, tout réel est un point de coupure, tandis que $[0,1]$ possède deux points de non-coupure,[0,1[en a un seul. un disque du plan, ouvert ou fermé, en a une infinité, tous ses points.
Soit K un espace compact connexe séparé contenant au moins deux points : on va montrer que K a au moins deux « non-cut » points. La démonstration qui suit figure dans la page (transmise par Mehdi Tibouchi) :

http://books.google.com/books?id=xEVMqtn5jOYC&pg=PA49

On raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble $\overline{C}$ des points de non-coupure de K est de cardinal au plus 1. Il existe alors c dans K tel que $K-\{c\}$ n'est pas connexe, donc $K-\{c\}$ est la somme de deux ouverts disjoints non vides G et H, avec $\overline{C}\subset H$.
Comme G et $\overline{C}$ sont disjoints, $K-\{x\}$ n'est connexe pour aucun x de G, aussi pour tout x de G, $K-\{x\}$ est la somme de deux ouverts disjoints non vides $U(x)$ et $V(x)$, avec c dans $V(x)$.

Pour tout x de G, $x+U(x)$ et $x+V(x)$ sont connexes.
Soit f l'application de K dans K définie par :
$$f(x)=x,\ f(u)=u \text{ pour tout } u \text{ de } U(x),\ f(v)=x \text{ pour tout } v \text{ de } V(x).$$
Il est évident que f est continue en tout point de $U(x)+V(x)$, la continuité de f en x s'établissant par l'inclusion $f\left(w(x)\right)\subset w(x)$ pour tout voisinage $w(x)$ de x. Il en résulte que $x+U(x)=f(K)$ est connexe.
On prouve de même que $x+V(x)$ est connexe.

Tous les $U(x)$ sont dans G
Le connexe $x+U(x)$ est soit inclus dans l'ouvert G, soit inclus dans l'ouvert H, donc dans G car x est dans G.

Si y est dans $U(x)$, alors $y+U(y)$ est inclus dans $U(x)$.
Par hypothèse, y n'est pas dans $x+V(x)$ puisque c'est le complémentaire de $U(x)$, aussi $x+V(x)$ est dans la réunion $U(y)+V(y)$. Il en résulte que le connexe $x+V(x)$ est tout entier soit dans $U(y)$, soit dans $V(y)$.
Comme c appartient à $V(x)$ et n'appartient pas à $U(y)$, $x+V(x)$ est inclus dans $V(y)$.
En passant aux complémentaires, $y+U(y)\subset U(x)$.

La famille $(U(x))_{x\in G}$ étant (partiellement) ordonnée par l'inclusion, on peut en extraire une chaine maximale $(U(x_i))_{i\in I}$ (chaque x_i est dans G) ce qui signifie (mon livre, chapitre **17**) :
− d'une part que pour tous i et j, on a $U(x_i)\subset U(x_j)$ ou $U(x_j)\subset U(x_i)$, et donc que toute intersection finie de $U(x_i)$ est non vide ;
− d'autre part qu'il n'existe pas de famille totalement ordonnée pour l'inclusion qui contienne strictement $(U(x_i))_{i\in I}$, et donc si un $U(x)$ minorait pour l'inclusion tous les $U(x_i)$, alors x serait dans la famille $(x_i)_{i\in I}$.

L'intersection des $x_i+U(x_i)$ n'est pas vide.
D'abord, $x+U(x)$ est fermé puisque complémentaire dans K de l'ouvert $V(x)$; comme K est compact, il en est de même de $x+U(x)$. Une intersection de compacts est non vide quand toute intersection finie de ses facteurs est non vide. Soit donc J une partie finie de I : $\bigcap\left(x_j+U(x_j)\right)\supset\bigcap U(x_j)$ qui n'est pas vide car les $U(x_j)$ forment une famille finie totalement ordonnée pour l'inclusion.

L'intersection des $U(x_i)$ n'est pas vide.
Soit p dans l'intersection $\bigcap(x_i+U(x_i))$. Alors,

ou $p\in\bigcap U(x_i)$, ou il existe un indice k tel que $p=x_k$ et $p\in U(x_i)$ pour tout $i\neq k$.

Dans le premier cas, $\bigcap U(x_i)$ n'est pas vide.
Dans le deuxième cas, on sait que $x_k+U(x_k)$ est contenu dans l'ouvert $U(x_i)$ et alors $\bigcap U(x_i)$ est $U(x_k)$, qui n'est pas vide.

La chaîne des $U(x_i)$ n'est pas maximale, c'est la contradiction recherchée.
Soit $q\in\bigcap U(x_i)$: d'abord q est distinct de tous les x_i, ensuite, q étant dans $U(x_i)$, $q+U(q)$ est inclus dans $U(x_i)$ pour tout i. Il en résulte que $U(q)$ est dans tous les $U(x_i)$ donc la chaine des $(U(x_i))_{i\in I}$ n'est pas maximale. Cette contradiction montre que $card\,\overline{C}\geq 2$.

Remarque. La démonstration prouve que lorsque $K-\{c\}$ n'est pas connexe, et donc que $K-\{c\}$ est la somme de deux ouverts disjoints non vides G et H, alors G et H contiennent nécessairement chacun un point de non-coupure.