18 - LE THÉORÈME DE JORIS (1982)

www.daniel-saada.eu

Le théorème d'**Henri Joris** dit ceci : si une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est telle que f^n soit C^∞ sur $\mathbb{R}$ à partir d'un certain rang, alors f est elle-même C^∞. Autrement dit, il y a équivalence entre : f est C^∞, f^n est C^∞ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f^n est C^∞ pour $n \geq n_0$. Pour que f^n soit C^∞ à partir d'un certain rang, il faut et il suffit qu'il existe deux entiers a et b premiers entre eux tels que f^a et f^b soit C^∞ : la condition est nécessaire parce que deux entiers consécutifs sont premiers entre eux, elle est suffisante car il est bien connu que tout entier $n \geq ab$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$ de a et b. Dans l'énoncé du théorème de Joris, on peut donc faire l'hypothèse qu'il existe un entier $r \geq 2$ tel que f^r et f^{r+1} soient C^∞. Il est bien entendu que f^n désigne la fonction définie par $f^n(x) = \left(f(x)\right)^n$ tandis que $f^{(n)}$ est la dérivée n^ième^ de f, avec la convention $f^{(0)} = f$.

Dans les premiers paragraphes, on suppose pour le confort du lecteur que f^2 et f^3 sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ (cas $r = 2$), la transcription sera facile dans le cas général qui est f^r et f^{r+1} sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1) f est C^∞ sur l'ouvert où elle ne s'annule pas

D'abord, f est continue sur $\mathbb{R}$ car $f = \sqrt[3]{f^3}$ (dans la cas général $f = \sqrt[r]{f^r}$ si r est impair, sinon $f = \sqrt[r+1]{f^{r+1}}$).
Ensuite, puisque $f = f^3 / f^2$, f est C^∞ sur un voisinage de *chaque* x *en lequel* $f(x) \neq 0$: f est donc C^∞ sur l'ouvert complémentaire du fermé $f^{-1}(0)$, ou $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$.
Remarque : $f^{-1}(0)$ est fermé dès qu'une puissance f^p de f est continue car $f^{-1}(0) = (f^p)^{-1}(0)$.

2) f est C^∞ au voisinage de toute racine a d'ordre fini

Une racine a de f est dite d'ordre (de dérivabilité) fini s'il existe un entier $n \geq 1$ et un réel k *non nul* tels que :

$$f(x) \sim k(x-a)^n \text{ au voisinage de } a \text{, ou encore } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = k \neq 0.$$

Une racine a d'ordre fini est *isolée,* f est dérivable en a et $f'(a) = k$ si $n = 1$, 0 si $n \geq 2$. Plus généralement, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^p} = 0$ pour $0 \leq p \leq n-1$; si f est ce classe C^n dans un voisinage de a, alors $f^{(p)}(a) = 0$ pour $0 \leq p \leq n-1$ et $f^{(n)}(a) = k.n!$.

Pour montrer que f est C^∞ au voisinage de a, on écrit $f(x) = \frac{f^3(x)}{(x-a)^{3n}} \times (x-a)^n \times \frac{(x-a)^{2n}}{f^2(x)}$ et on va montrer que $\frac{f^3(x)}{(x-a)^{3n}}$ et $\frac{(x-a)^{2n}}{f^2(x)}$ ont des prolongements C^∞ sur un voisinage de a.

Lemme 1 : φ C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(a) = 0$ impliquent que $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x-a}$ a un prolongement C^∞ sur $\mathbb{R}$,

ou encore qu'il existe ψ C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = (x-a)\psi(x)$ pour tout x.

En effet, $\varphi(x)=\int_a^x \varphi'(t)dt=(x-a)\int_0^1 \varphi'(ux-ua+a)du$ en posant $u=(t-a)/(x-a)$. Il suffit donc que l'intégrale $I(x)=\int_0^1 \varphi'(ux-ua+a)du$ soit C^∞ sur $\mathbb{R}$ ce qui est le cas car φ' est elle-même C^∞. Montrons par exemple que $I'(x)$ vaut $\int_0^1 u.\varphi''(ux-ua+a)du$. On majore d'abord $\left|\frac{I(x_0+h)-I(x_0)}{h}-\int_0^1 u.\varphi''(ux_0-ua+a)du\right|$ par

$$\max_{0\le u\le 1}\left|\frac{\varphi'(ux_0-ua+a+uh)-\varphi'(ux_0-ua+a)}{h}-u.\varphi''(ux_0-ua+a)\right|$$

qui s'écrit $\max_{0\le u\le 1}\left|u.\varphi''(\theta)-u.\varphi''(ux_0-ua+a)\right|$ avec $\left|\theta-(ux_0-ua+a)\right|\le u\,|h|\le|h|$.

Or $\max_{0\le u\le 1}\left|u.\varphi''(\theta)-u.\varphi''(ux_0-ua+a)\right|\le \max_{0\le u\le 1}\left|\varphi''(\theta)-\varphi''(ux_0-ua+a)\right|\le\varepsilon$ dès que $|h|$ est suffisamment petit, car φ'' est uniformément continue sur le segment fixe où se trouve les θ et ux_0-ua+a quand u décrit $[0,1]$.

Une récurrence immédiate donne $I^{(n)}(x)=\int_0^1 u^n\varphi^{(n+1)}(ux-ua+a)du$ pour tout n.

Deuxième méthode, qui n'utilise pas la continuité uniforme (**Oral HEC 1992**) : $\psi(x)$ s'écrivant $\varphi(x)\times\frac{1}{x-a}$, *la formule de Leibniz* permet d'affirmer que, pour $x\neq a$,

$$\psi^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}(x-a)^k\varphi^{(k)}(x).$$

La formule de Taylor avec reste intégral, appliquée entre x et a, à l'ordre n, donne :

$$\varphi(a)=\varphi(x)+\sum_{1}^{n}\frac{(a-x)^k}{k!}\varphi^{(k)}(x)+\int_x^a\frac{(a-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)dt.$$

Comme $\varphi(a)=0$, il vient $\psi^{(n)}(x)=\frac{1}{(x-a)^{n+1}}\int_a^x (t-a)^n\varphi^{(n+1)}(t)dt$. Reste à montrer que $\psi^{(n)}(x)$ a une limite *finie* quand $x\to a$. Cette limite, qui vaut

$$\frac{1}{(x-a)^{n+1}}\int_a^x (t-a)^n\varphi^{(n+1)}(a)dt=\frac{1}{n+1}\varphi^{(n+1)}(a),$$

s'obtient en exploitant le fait que $\varphi^{(n+1)}$ a une dérivée continue : comme x tend vers a, on peut supposer que x reste dans $[a-1,a+1]$ et il en est de même de t. Or, sur ce segment, la dérivée $\varphi^{(n+2)}$ de $\varphi^{(n+1)}$ est bornée par un réel K. On en déduit $|\varphi^{(n+1)}(t)-\varphi^{(n+1)}(a)|\le K\,|t-a|$. En distinguant $x<a$ de $x>a$, on aboutit à $\left|\psi^{(n)}(x)-\frac{1}{n+1}\varphi^{(n+1)}(a)\right|\le K\frac{|x-a|}{n+2}$, ce qui achève la démonstration.~

Lemme 2 : φ C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(x)\sim\lambda(x-a)^p$ avec $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$, impliquent

a) $\varphi(x)/(x-a)^p$ a un prolongement C^∞ sur $\mathbb{R}$;

b) $(x-a)^p/\varphi(x)$ a un prolongement C^∞ sur un voisinage de a.

Il résulte des deux **lemmes** que f est C^∞ dans un voisinage de a.

<u>Preuve de lemme **2**</u> :

a) La condition $\varphi(x)\sim\lambda(x-a)^p$ implique $\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{(x-a)^q}=0$ pour q allant de 0 à $p-1$ et en particulier $\varphi(a)=0$, donc $\psi_1(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x-a}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Comme $\psi_1(a) = 0$, $\psi_2(x) = \dfrac{\psi_1(x)}{(x-a)} = \dfrac{\varphi(x)}{(x-a)^2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Mais $\psi_2(a)$ vaut encore 0 ; de proche en proche on arrive à $\psi_p(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(x-a)^p}$ C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Comme $\psi_p(a) = \lambda \neq 0$, $\dfrac{1}{\psi_p(x)} = \dfrac{(x-a)^p}{\varphi(x)}$ est définie et C^∞ sur un voisinage de a .

3) f est C^∞ au voisinage de toute racine a d'ordre infini

Une racine a de f est d'ordre infini quand $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$ *pour tout* n . On dit aussi que f est plate en a : c'est le cas par exemple de la fonction e^{-1/x^2} qui est plate en $a = 0$. Si f est plate en a et C^∞ dans un voisinage de a , toutes les dérivées de f en a sont nulles. Il en résulte que pour notre fonction f , $f^{(n)} = 0$ sur $P(f)$ pour tout n . On aura donc $(f^r)^{(n)}$ nulle sur $P(f)$ pour r assez grand.

L'ensemble $P(f)$ des a où f est plate est un fermé de $\mathbb{R}$: c'est vrai quand f est C^∞ car $P(f) = \bigcap_n \left(f^{(n)}\right)^{-1}(0)$ est une intersection de fermés. C'est encore vrai si f^2 , par exemple, est C^∞ car $P(f) = P(f^2)$. En effet, $a \in P(f)$ si et seulement si il existe une suite strictement croissante d'entiers n_k telle que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^{n_k}} = 0$, d'où :

− si $a \in P(f)$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^2(x)}{(x-a)^{2n}} = 0$ et $a \in P(f^2)$;

− si $a \in P(f^2)$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^2(x)}{(x-a)^n} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^2(x)}{(x-a)^{2n}} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$ et $a \in P(f)$.

En conclusion, f est C^∞ sur l'ouvert $U = \mathbb{R} - P(f)$, nulle sur $P(f)$ et continue sur $\mathbb{R}$, et il devra en être ainsi pour chaque dérivée de f si f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, on utilise le lemme

Lemme 3 : soit f C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}$, nulle sur le fermé $\mathbb{R} - U$ et continue sur $\mathbb{R}$: pour que f soit C^1 sur $\mathbb{R}$, il suffit qu'existe g continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R} - U$ et $g = f'$ sur U , ou encore que f' admette un prolongement g continu sur $\mathbb{R}$ et nul sur $\mathbb{R} - U$.

Il faut montrer que pour tout x_0 de $\mathbb{R} - U$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)$, ou $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{x - x_0} = 0$ car f et g sont nulles sur $\mathbb{R} - U$. On se limitera à la limite à droite. Si x est dans $\mathbb{R} - U$, $\dfrac{f(x)}{x - x_0} = 0$; si x est dans U , soit $]\alpha, \beta[$ la composante connexe de U contenant x : $x_0 \leq \alpha < x$. Comme $f(x) = f(x) - f(\alpha)$, il existe $\gamma \in]\alpha, x[$ tel que $f(x) = (x - \alpha) f'(\gamma) = (x - \alpha) g(\gamma)$ car $\gamma \in U$, et donc $| f(x) | = | x - \alpha | . | g(\gamma) | \leq (x - x_0) . \max\limits_{[x_0, x]} | g |$. Comme g est continue en x_0 , $\max\limits_{[x_0, x]} | g |$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 : f a donc 0 pour dérivée à droite en x_0 .

Après, il suffira de montrer que chaque dérivée $f^{(n)}$, définie sur U, se prolonge en g_n continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $P(f)$: c'est l'objet du **4)**.

4) Chacune des dérivées $f^{(n)}$ a un prolongement continu sur $\mathbb{R}$ et nul sur $P(f)$

C'est la partie la plus substantielle de la démonstration, très technique dans le papier de Joris :

http://www.springerlink.com/content/r515678g436p0299/fulltext.pdf?page=1

Une preuve plus simple, de caractère algébrique, absolument remarquable, a été publiée en 1989 conjointement par Ichiro Amemiya et Kazuo Masuda :

http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.kmj/1138038992

C'est celle que nous exposons.

Désignons par $\mathcal{A}$ l'anneau des fonctions α définies et *continues* sur un ouvert U de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles :

$$\mathcal{A} = \left(C(U), +, \times\right).$$

Soit $\mathcal{B}$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}$ formé des fonctions α ayant un prolongement β *continu sur* $\mathbb{R}$ *et nul sur* $\mathbb{R}-U$:

$$\alpha = \beta / U \text{ et } \beta(\mathbb{R}-U) = 0.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{B}$ est un sous-anneau de $\mathcal{A}$, non unitaire car il ne contient pas l'élément unité, la fonction 1 sur U. De plus, $\mathcal{B}$ a la propriété :

(P) si α dans $\mathcal{A}$ est telle que α^r et α^{r+1} appartiennent à $\mathcal{B}$, alors $\alpha \in \mathcal{B}$.

En effet, l'un des deux entiers r et $r+1$ est impair, disons r, et alors puisque $\alpha^r = \beta / U$, $\alpha = \sqrt[r]{\beta} / U$ avec $\sqrt[r]{\beta}$ continu sur $\mathbb{R}$ et nul sur $\mathbb{R}-U$.

Introduisons maintenant l'anneau $\mathcal{A}[[X]]$ des séries entières formelles $\sum_0^\infty \alpha_n X^n$ *à coefficients dans* $\mathcal{A}$ et l'anneau $\mathcal{B}[[X]]$ des séries entières formelles $\sum_0^\infty \beta_n X^n$ *à coefficients dans* $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{A}$, les anneaux $\mathcal{A}[[X]]$ et $\mathcal{B}[[X]]$ sont unitaires et commutatifs. Rappelons la multiplication de deux séries formelles :

Enfin, soit J l'application de $C^\infty(U)$ dans $\mathcal{A}$ définie par $J(\varphi) = \sum_0^\infty \frac{\varphi^{(n)}}{n!} X^n$ (chaque $\varphi^{(n)}$ est continue sur U).

J est un homomorphisme d'anneaux : $J(\varphi.\psi) = J(\varphi)J(\psi)$, et en particulier $J(\varphi^r) = J(\varphi)^r$. En effet,

$$(\varphi\psi)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \varphi^{(p)}\psi^{(n-p)} \text{ et donc } \frac{(\varphi\psi)^{(n)}}{n!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{\varphi^{(p)}}{p!} \frac{\psi^{(n-p)}}{(n-p)!}.$$

Si l'ouvert U est $\mathbb{R}-P(f)$, f est C^∞ sur U et $J(f/U) = \sum_0^\infty \frac{(f/U)^{(n)}}{n!} X^n \in \mathcal{A}[[X]]$. Mais puisque f^r est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et plate sur $P(f)$, $J(f^r/U) = \sum_0^\infty \frac{(f^r/U)^{(n)}}{n!} X^n \in \mathcal{B}[[X]]$ car f^r/U a un prolongement continu sur $\mathbb{R}$, à savoir f^r, qui est nul sur $P(f)$.

Il en résulte que $J(f/U)^r \in \mathcal{B}[[X]]$ pour r assez grand :
nous allons en déduire que $J(f/U) \in \mathcal{B}[[X]]$,
ce qui achèvera la démonstration.

On revient au cadre abstrait général : un anneau commutatif unitaire A, B un sous-anneau *non nécessairement unitaire* de A qui a la propriété

(P) *si a est dans A et $a^r \in B$ pour r assez grand, alors $a \in B$.*

Nous allons prouver que $B[[X]]$ a la propriété **(P)** dans $A[[X]]$, ce qui signifie

si $S = \sum_0^\infty a_n X^n \in A[[X]]$ est telle que $S^r \in B[[X]]$ pour r assez grand,
alors $S \in B[[X]]$, c'est-à-dire tous les $a_n \in B$.

a) $a_0 \in B$

En effet, le premier terme de S^r est $a_0{}^r$, donc $a_0 \in B$ d'après **(P)**

On retrouve que f est continue sur $\mathbb{R}$ ($a_0 = f/U$ quand $S = \sum_0^\infty \frac{(f^r/U)^{(n)}}{n!} X^n$)

b) Un sous-anneau unitaire B' lié à B

On introduit l'ensemble $B' = \{a \in A : a_0 a^m \in B \ pour\ tout\ m\}$. On a tout de suite $a_0 B' \subset B \subset B'$: puisque $a_0 \in B$, $B \subset B'$; $a_0 B' \subset B$ par définition de B'. B' est un sous-anneau, unitaire évidemment. En effet,

− B' est stable par multiplication : si $a_0.a^m \in B$ et $a_0.b^m \in B$, alors $a_0.a^{rm} \in B$ et $a_0.b^{rm} \in B$, et alors $a_0{}^2.a^{rm}.b^{rm} \in B$, d'où $a_0{}^r.a^{rm}.b^{rm} \in B$ pour tout $r \geq 2$ et $a_0.(ab)^m \in B$ d'après **(P) ;**

− B' est stable par soustraction : il faut montrer que $a_0(a'-b')^m \in B$ pour tout m si a' et b' sont dans B', or $a_0(a'-b')^m$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de termes en $a_0(a')^u(b')^v$ et $a_0(a')^u(b')^v \in B$ puisque $(a')^u(b')^v \in B'$.

c) Tous les a_n sont dans l'anneau B'

Par récurrence forte sur n : a_0 est dans B' puisque dans B ; on suppose que $a_0, a_1, ..., a_n$ sont dans B' et on veut le prouver pour a_{n+1}.

D'après l'hypothèse de récurrence, $S_n = \sum_0^n a_i X^i$ appartient à l'anneau $B'[[X]]$, donc $a_0 S_n{}^m \in B[[X]]$ pour tout m. La formule du binôme donne $(S - S_n)^{(r+1)m} = \sum_{k=0}^{(r+1)m} (-1)^k \lambda_k S^k S_n{}^{(r+1)m-k}$, avec λ_k entier positif. On en déduit $a_0 S^r (S - S_n)^{(r+1)m} = \sum_{k=0}^{(r+1)m} (-1)^k \lambda_k S^{k+r}.a_0 S_n{}^{(r+1)m-s}$, somme qui est dans $B[[X]]$ car S^{k+r} y est par hypothèse et les produits $a_0 S_n{}^{(r+1)m-s}$ par propriété. Le coefficient de plus bas « degré » dans $a_0 S^r (S - S_n)^{(r+1)m}$ est $a_0{}^{r+1} a_{n+1}{}^{(r+1)m}$ qui est donc dans B pour r assez grand, aussi $a_0 a_{n+1}{}^m$ est dans B d'après **(P).**

d) $a_0{}^k S^m \in B[[X]]$ pour tous k et m

En effet, $S \in B'[[X]]$ d'après **c)**, les puissances de S aussi, et donc $a_0 S^m \in B[[X]]$ car $a_0 B' \subset B$; il en est évidemment de même de $a_0{}^k S^m$.

e) $a_1 \in B$

En effet, $(S-a_0)^r = S^r + \sum_{k=1}^{r} \lambda . a_0{}^k S^{r-k}$ est dans $B[[X]]$ pour r assez grand puisque S^r et $a_0{}^k S^{r-k}$ y sont. Donc $a_1{}^r$, premier terme de $(S-a_0)^r$, est dans B pour r assez grand, donc $a_1 \in B$ d'après **(P).**

f) $S \in B[[X]]$

On montre par récurrence que $a_n \in B$, avec l'hypothèse :

$$a_n \in B \text{ et } T_n{}^r \in B[[X]], \text{ où } T_n = a_n + a_{n+1}X + ... = \sum_{k=n}^{\infty} a_k X^{n-k},$$

qui est vraie pour $n=0$ ($T_0 = S$) et $n=1$ ($T_1 = S - a_0$).

En effet, $T_n - a_n = X T_{n+1}$ et l'hypothèse de récurrence entraîne, comme en **e)**, que $(T_n - a_n)^r \in B[[X]]$ à partir d'un certain rang ; il en résulte que $a_{n+1}{}^r \in B$ à partir d'un certain rang, donc $a_{n+1} \in B$.

5) Transcription de quelques résultats précédents pour $S = J(f/U) = \sum_0^{\infty} \frac{(f/U)^{(n)}}{n!} X^n$

Nous allons omettre $/U$ en gardant bien présent à l'esprit que dans $S = J(f) = \sum_0^{\infty} \frac{(f)^{(n)}}{n!} X^n$, les dérivées sont définies sur U et non sur $\mathbb{R}$. D'autre part, on rappelle l'importante formule

$$S^k = J(f^k) = \sum_0^{\infty} \frac{(f^k)^{(n)}}{n!} X^n .$$

Sauf mention du contraire, on suppose dans ce paragraphe que f^2 et f^3 sont C^{∞}, donc f^k est C^{∞} à partir de $k=2$.

a) Le prolongement de $f.f'$

Quand f^2 est C^{∞}, $f.f'$ se prolonge puisque c'est la dérivée de $f^2/2$. Aussi supposera-t-on dans cet alinéa que f^3 et f^4 sont C^{∞}.

D'abord, f^k est C^{∞} à partir de $k=6$; ensuite, le premier terme de $f.S^6(S-f)^7$ est $(f.f')^7 X^7$. On obtient

$$f^7 (f')^7 = \frac{1}{7!} \sum_{k=0}^{7} (-1)^k \binom{7}{k} f^{8-k} (f^{6+k})^{(7)} .$$

Aussi $7! f^7 (f')^7$ vaut

$$f^8(f^6)^{(7)} - 7f^7(f^7)^{(7)} + 21 f^6 (f^8)^{(7)} - 35 f^5 (f^9)^{(7)} + 35 f^4 (f^{10})^{(7)} - 21 f^3 (f^{11})^{(7)} + 7 f^2 (f^{12})^{(7)} - f (f^{13})^{(7)}$$

expression qui donne le prolongement cherché à $\mathbb{R}$ de $(f.f')^7$. Celui de $f.f'$ en est la racine septième (après division par $7!$).

b) Le prolongement de $f(f')^m$

Le premier terme de $f.S^2(S-f)^{3m}$ est $f^3(f')^{3m} X^{3m}$. Explicitons le calcul quand $m=2$:

le premier terme de $f.S^2(S-f)^6 = f.S^2\sum_{k=0}^{6}(-1)^k\binom{6}{k}S^{6-k}f^k$ étant $f^3f'^6X^6$, il vient

$$f^3f'^6 = \frac{1}{6!}\sum_{k=0}^{6}(-1)^k\binom{6}{k}f^{k+1}(f^{8-k})^{(6)}$$

qui fournit le prolongement de $f^3f'^6$. La racine cubique de ce prolongement prolonge $f.f'^2$.

Pour $f(f')^3$, il faudrait développer $f.S^2(S-f)^9 = f.S^2\sum_{k=0}^{9}(-1)^k\binom{9}{k}S^{9-k}f^k$, dont le premier terme est $f^3f'^9X^9$. Le calcul est laissé au lecteur.

c) Le prolongement de $f.f''$

Le premier terme de $f.S^2.(S-f-f'.X)^3$ est $\frac{1}{8}f^3(f'')^3X^6$. On développe et on identifie :

$$\frac{1}{8}f^3(f'')^3 = \frac{1}{6!}f(f^5)^{(6)} - \frac{3}{6!}f^2(f^4)^{(6)} - \frac{3}{5!}f.f'(f^4)^{(5)} + \frac{3}{6!}f^3(f^3)^{(6)} + \frac{6}{5!}f^2f'(f^3)^{(5)} + \frac{3}{4!}f(f')^2(f^3)^{(4)}$$
$$-\frac{1}{6!}(f^4)(f^2)^{(6)} - \frac{3}{5!}(f^3)(f')(f^2)^{(5)} - \frac{3}{4!}f^2(f')^2(f^2)^{(4)} - \frac{1}{3!}f(f')^3(f^2)^{(3)}.$$

Chacun des dix termes du membre de droite se prolongent à $\mathbb{R}$, d'une part parce que les puissances de f en jeu sont C^∞ sur $\mathbb{R}$, d'autre part parce que $f.f'$ est la dérivée de $f^2/2$, enfin parce que $f(f')^k$ se prolonge d'après **b)**. Il en résulte que $f^3(f'')^3$ se prolonge, donc $f(f'')$ .Voir en **f)** la vérification de l'égalité avec Maple.

d) Le prolongement de $f.f'''$

Le coefficient de X^9 dans le produit $f.S^2(S-f-f'X-\frac{f''}{2}X^2)^3$ est $f^3\left(\frac{f'''}{6}\right)^3$.

On obtient $(f.f''')^3$ comme somme de 20 termes, qui débute par

$$f\frac{(f^5)^{(9)}}{5!} - f\left(f\frac{(f^4)^{(9)}}{4!} + f.f'\frac{(f^4)^{(8)}}{4!} + \frac{f.f''}{2}\frac{(f^4)^{(7)}}{4!}\right)$$

L'existence du prolongement de $f.f'''$ résulte de l'existence des prolongements de $f(f')^m$ et $f(f'')^m$.

e) Le prolongement de f'

Le premier terme de $(S-f)^3$ est $(f')^3X^3$; en développant le cube, il vient

$$(f')^3 = (f^3)'''/6 - 3f(f^2)'''/6 + 3f^2(f)'''/6$$

Montrons que le cube de f' a un prolongement à $\mathbb{R}$, il en sera de même de f'

C'est le prolongement de $f^2.f'''$, que nous n'avons pas explicité, qui donne la réponse.

f) Une vérification avec Maple

On vérifie avec Maple l'égalité vue en **c)** :

$$\frac{1}{8}f^3(f'')^3=\frac{1}{6!}f(f^5)^{(6)}-\frac{3}{6!}f^2(f^4)^{(6)}-\frac{3}{5!}f.f'(f^4)^{(5)}+\frac{3}{6!}f^3(f^3)^{(6)}+\frac{6}{5!}f^2f'(f^3)^{(5)}+\frac{3}{4!}f(f')^2(f^3)^{(4)}$$
$$-\frac{1}{6!}(f^4)(f^2)^{(6)}-\frac{3}{5!}(f^3)(f')(f^2)^{(5)}-\frac{3}{4!}f^2(f')^2(f^2)^{(4)}-\frac{1}{3!}f(f')^3(f^2)^{(3)}.$$

En divisant d'abord par f [(D@@n) signifie $f^{(n)}$] :

```
g:=(D@@6)(f^5)/720-3*f*(D@@6)(f^4)/720-
3*D(f)*(D@@5)(f^4)/120+3*f^2*(D@@6)(f^3)/720+6*f*D(f)*(D@@5)(f^3)/120+3*D(f)*D(
f)*(D@@4)(f^3)/24-(f^3)*(D@@6)(f^2)/720-3*(f^2)*D(f)*(D@@5)(f^2)/120-
3*f*D(f)*D(f)*(D@@4)(f^2)/24-D(f)*D(f)*D(f)*(D@@3)(f^2)/6;
```

$$\begin{aligned}
g :=\ & \frac{1}{144}(D^{(6)})(f)f^4+\frac{1}{6}(D^{(5)})(f)\,D(f)f^3+\frac{5}{12}(D^{(4)})(f)\,(D^{(2)})(f)f^3\\
&+\frac{5}{4}(D^{(4)})(f)\,D(f)^2f^2+\frac{5}{18}(D^{(3)})(f)^2f^3+5\,(D^{(3)})(f)\,(D^{(2)})(f)\,D(f)f^2\\
&+\frac{10}{3}(D^{(3)})(f)\,D(f)^3f+\frac{5}{4}(D^{(2)})(f)^3f^2+\frac{15}{2}(D^{(2)})(f)^2\,D(f)^2f+\frac{5}{2}(D^{(2)})(f)\,D(f)^4\\
&-\frac{1}{240}f\,(4f^3(D^{(6)})(f)+72f^2(D^{(5)})(f)\,D(f)+180f^2(D^{(4)})(f)\,(D^{(2)})(f)\\
&+360fD(f)^2(D^{(4)})(f)+120f^2(D^{(3)})(f)^2+1440fD(f)\,(D^{(3)})(f)\,(D^{(2)})(f)\\
&+480\,(D^{(3)})(f)\,D(f)^3+360\,(D^{(2)})(f)^3f+1080\,(D^{(2)})(f)^2\,D(f)^2)-\frac{1}{40}D(f)\,(\\
&4\,(D^{(5)})(f)f^3+60\,(D^{(4)})(f)\,D(f)f^2+120\,(D^{(3)})(f)\,(D^{(2)})(f)f^2\\
&+240\,(D^{(3)})(f)\,D(f)^2f+360\,(D^{(2)})(f)^2\,D(f)f+240\,(D^{(2)})(f)\,D(f)^3)+\frac{1}{240}f^2\,(\\
&60\,(D^{(3)})(f)^2f+360\,(D^{(2)})(f)\,D(f)\,(D^{(3)})(f)+90\,(D^{(2)})(f)f(D^{(4)})(f)\\
&+90\,D(f)^2(D^{(4)})(f)+36fD(f)\,(D^{(5)})(f)+3f^2(D^{(6)})(f)+90\,(D^{(2)})(f)^3)+\frac{1}{20}f\\
&D(f)\,(60\,(D^{(2)})(f)f(D^{(3)})(f)+60\,(D^{(3)})(f)\,D(f)^2+30\,D(f)f(D^{(4)})(f)\\
&+3f^2(D^{(5)})(f)+90\,(D^{(2)})(f)^2\,D(f))+\\
&\frac{1}{8}D(f)^2\,(24\,D(f)f(D^{(3)})(f)+3f^2(D^{(4)})(f)+36\,(D^{(2)})(f)\,D(f)^2+18f(D^{(2)})(f)^2)\\
&-\\
&\frac{1}{720}f^3\,(30\,(D^{(4)})(f)\,(D^{(2)})(f)+20\,(D^{(3)})(f)^2+12\,D(f)\,(D^{(5)})(f)+2f(D^{(6)})(f))\\
&-\frac{1}{40}f^2\,D(f)\,(20\,(D^{(3)})(f)\,(D^{(2)})(f)+10\,D(f)\,(D^{(4)})(f)+2f(D^{(5)})(f))\\
&-\frac{1}{8}fD(f)^2\,(6\,(D^{(2)})(f)^2+8\,D(f)\,(D^{(3)})(f)+2f(D^{(4)})(f))\\
&-\frac{1}{6}D(f)^3\,(6\,D(f)\,(D^{(2)})(f)+2f(D^{(3)})(f))
\end{aligned}$$

> **simplify(g);**

$$\frac{1}{8}(\mathrm{D}^{(2)})(f)^3 f^2$$

Complément. Convenons de dire qu'une application de R dans C est $\mathcal{C}^\infty$ si ses parties réelle et imaginaire le sont. Montrons que si f est une application de R dans C telle que f^2 et f^3 sont $\mathcal{C}^\infty$, alors f est $\mathcal{C}^\infty$.

Décomposons f en $u+iv$, u et v réelles. Par hypothèse, les fonctions u^2-v^2, uv, u^3-3uv^2, v^3-3vu^2 sont $\mathcal{C}^\infty$.
Comme $(u+iv)^2(u-iv)^2=(u^2+v^2)^2$, $(u^2+v^2)^2=(u^2-v^2)^2+4u^2v^2$ et donc $(u^2+v^2)^2$ est $\mathcal{C}^\infty$.
De même, $(u^2+v^2)^3=(u+iv)^3(u-iv)^3$, $(u^2+v^2)^3=(u^3-3uv^2)^2+(v^3-3vu^2)^2$ est aussi $\mathcal{C}^\infty$.
D'après le Théorème de Joris réel, u^2+v^2 est donc $\mathcal{C}^\infty$, et il en est de même par linéarité de u^2 et v^2.
L'identité $8u^5=(u^3-3uv^2)(8u^2-3v^2)-9uv(v^3-3vu^2)$ montre alors que u^5 est $\mathcal{C}^\infty$: comme u^2 est $\mathcal{C}^\infty$, u est $\mathcal{C}^\infty$. On opère de façon similaire avec v, ce qui achève la démonstration. Voici comment arriver à l'identité : écrivons d'abord $u^5=(u^3-3uv^2)u^2+3u^3v^2$; en posant $A=u^3-3uv^2$ et $B=v^3-3vu^2$, il vient
$Buv=uv^4-3v^2u^3$ et $Av^2=u^3v^2-3uv^4$, d'où $3Buv+Av^2=-8v^2u^3$ et enfin

$$8u^5=8Au^2-3(3Buv+Av^2)=A(8u^2-3v^2)-9uvB.$$

BIBLIOGRAPHIE :

• *On Joris' theorem on differentiability of functions*, Ichiro Amemiya and Kazuo Masuda,
Kodai Math. J. Volume 12, Number 1 (1989), 92-97.

• *Une C^∞-application non-immersive qui possède la propriété universelle des immersions*,
Henri Joris, **Archiv der Mathematik, Volume 39, Number 3 / septembre 1982, 269-277**.

• *Un théorème de Joris*, Sylvain Bruiltet, **RMS 115-4, mai 2005, 16-21**.