16 - TRIBU DE BOREL ET TRIBU DE BAIRE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

www.daniel-saada.eu

Notations : E désignant un espace topologique, on notera $adh(X)$ l'adhérence d'une partie X de E, $\text{int}(X)$ son intérieur, $\overline{X}$ le complémentaire de X dans E, $X-Y$ le sous-ensemble $X\cap\overline{Y}$ (et donc $\overline{X}=E-X$), $X\Delta Y$ la réunion $(X-Y)\cup(Y-X)$; quand X et Y sont *disjoints*, $X\cup Y$ sera noté $X+Y$, aussi $X\Delta Y=(X-Y)+(Y-X)$.

1) Tribu de Borel d'un espace topologique E

La tribu borélienne d'un espace topologique E est la tribu engendrée par les ouverts, ou les fermés, de E ; elle sera notée $\mathcal{B}(E)$. Si p est une probabilité sur cette tribu, on sait que l'on peut agrandir $\mathcal{B}(E)$ en lui ajoutant les p-négligeables, mais cette extension dépend de p.

Si F est un autre espace topologique, une application f de E dans F est dite borélienne si l'image réciproque par f de tout borélien de F est un borélien de E ; toute application continue de E dans F est borélienne.

Cas des espaces métriques séparables. Si E est un espace métrique séparable, le nombre d'ouverts de E est au plus $\aleph_1$ (http://www.daniel-saada.eu/fichiers/14-variables_aleatoires_a_valeurs_dans_un_metrique.pdf) et donc sa tribu de Borel aussi (mon livre, p. **124**) ; d'autre part, cette tribu est engendrée par les boules ouvertes car tout ouvert d'un métrique séparable est une réunion dénombrable de boules ouvertes.
Une application f de E dans F, où seul F est supposé métrisable séparable, sera borélienne si l'image réciproque par f d'une boule ouverte de F est un borélien de E puisque tout ouvert de F est une réunion dénombrable de boules ouvertes.

2) Parties maigres d'un espace topologique E

Une partie R d'un espace topologique E est dite *rare* est si elle est contenu dans un fermé F d'intérieur vide :

$$R\subset F\subset E\,,\ F=adh(F)\,,\text{int}(F)=\varnothing\,.$$

Tout sous-ensemble d'un rare est rare et les parties rares sont stables par réunion finie. R est rare si et seulement si son adhérence est rare, aussi un rare est-il un sous-ensemble d'un fermé rare. Le complémentaire d'un fermé rare est un ouvert dense, et réciproquement.

Exemples. Si la topologie de E est séparée, chaque point de E est un fermé rare et donc toute partie finie est fermée et rare. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, une circonférence, une droite, sont des fermés rares. Un fermé auquel on a ôté son intérieur reste fermé et devient rare. Dans un espace vectoriel normé V, tout sous-espace distinct de V est d'intérieur vide et tout sous-espace de dimension finie est fermé (car complet pour la norme) : si un sous-espace W n'est pas dense dans V, il est donc rare car $adh(W)$ est un sous-espace fermé et distinct de V ; si W est de dimension finie et distinct de V, W est rare car fermé et d'intérieur vide.

Une partie maigre est une réunion finie ou dénombrable de parties rares. Tout rare est donc maigre et une réunion dénombrables de maigres est maigre. $\mathbb{Q}$ est maigre mais n'est pas rare dans $\mathbb{R}$. Un espace métrique complet n'est pas maigre en vertu du Théorème de Baire. Un espace vectoriel normé V ayant une base dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est maigre vis-à-vis de lui-même : en effet, V est la réunion dénombrable des sous-espaces $Vect(e_0,e_1,...,e_n)$.

Tout sous-ensemble d'un maigre est maigre : si $M'\subset M$ et $M=\bigcup R_n$, alors $M'=\bigcup(M'\cap R_n)$ et $M'\cap R_n$ est rare si R_n l'est. Caractérisation d'un maigre : $M \subset \bigcup F_n$, chaque F_n étant un fermé d'intérieur vide. La condition est suffisante, elle est nécessaire car $M = \bigcup R_n$ implique $M \subset \bigcup adh(R_n)$.

On désignera par $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des parties maigres de E.

3) Tribu de Baire d'un espace topologique E

L'ensemble des $B \cup M$, où B décrit $\mathcal{B}(E)$ et M décrit $\mathcal{M}(E)$,
est une tribu contenant $\mathcal{B}(E)$, appelée tribu de Baire de E.

La tribu de Baire est donc la tribu engendrée par la réunion des boréliens et des maigres. Faute de notation officielle, je la noterai $Ba(E)$. On notera l'analogie avec la complétion d'une tribu à laquelle on adjoint les négligeables.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant :

(i) tout X de $\mathcal{F}$ est inclus dans un Y de $\mathcal{T} \cap \mathcal{F}$;

(ii) $\mathcal{F}$ est stable par sous-ensemble : $X \in \mathcal{F}$ et $Y \subset X$ impliquent $Y \in \mathcal{F}$;

(iii) $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable.

Alors, pour toute tribu $\mathcal{T}$ de E, $\mathcal{T} \cup \mathcal{F}$ est une tribu.

D'abord $\mathcal{T} \cup \mathcal{F}$ contient évidemment E et est stable par réunion dénombrable. Prouvons que $\mathcal{T} \cup \mathcal{F}$ est stable par complémentaire. Soit $T \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{F}$ et Y de $\mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ qui contient X : comme $\overline{X} = (Y - X) + \overline{Y}$ et $\overline{T \cup X} = \overline{T} \cap \overline{X}$, $\overline{T \cup X} = \overline{T} \cap (Y - X) + \overline{T} \cap \overline{Y}$, or $\overline{T} \cap \overline{Y} \in \mathcal{T}$ et $\overline{T} \cap (Y - X) \in \mathcal{F}$ car sous-ensemble de Y.

Les négligeables et les maigres vérifient **(i)**, **(ii)**, **(iii)** parce que tout négligeable est contenu dans un négligeable de la tribu et tout maigre est contenu dans une réunion dénombrable de fermés rares, laquelle est un borélien maigre.

4) Une caractérisation de la tribu de Baire

X est dans la tribu de Baire si et seulement si il existe un ouvert
U de E tel que $X \Delta U = (X - U) + (U - X)$ est maigre.

DÉMONSTRATION

a) Définissons sur $\mathcal{P}(E)$ la relation binaire $\mathcal{R}$: $X \mathcal{R} Y$ *si et seulement si* $X \Delta Y$ *est maigre*. $\mathcal{R}$ est évidemment réflexive et symétrique ; l'inclusion $X \Delta Z \subset (X \Delta Z) \cup (X \Delta Z)$ implique que $\mathcal{R}$ est transitive. La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ vérifie en outre $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow \overline{X} \mathcal{R} \overline{Y}$ et est stable par intersection finie.

Un fermé F est $\mathcal{R}-$équivalent à un son intérieur, qui est ouvert, car $F \Delta (\operatorname{int} F) = F - \operatorname{int} F$ est un fermé rare (un ouvert U n'est pas toujours équivalent à un fermé car $\overline{U} - U$ peut contenir un ouvert non vide).

b) Soit $\mathcal{F}$ la famille des X de E pour lesquels il existe un ouvert U tel que $X \mathcal{R} U$.

$\mathcal{F}$ est dans la tribu de Baire $Ba(E)$, car $M = X \Delta U$ implique $X = M \Delta U$, et $M \Delta U$ est dans la tribu engendrée par les ouverts et les maigres. Pour établir l'inclusion inverse, et donc l'égalité $\mathcal{F} = Ba(E)$, il suffit de prouver que $\mathcal{F}$ est une tribu contenant les ouverts et les maigres.

$\mathcal{F}$ contient les ouverts car $U = U \Delta \varnothing$ (M est vide) et $\mathcal{F}$ contient les maigres car $M = \varnothing \Delta M$ (U est vide).

$\mathcal{F}$ stable par complémentaire : d'abord $\mathcal{F}$ contient les fermés car si F est fermé, $F\Delta(\mathrm{int}\,F)$ est maigre car rare ; ensuite $X\Delta U = \overline{X}\Delta\overline{U}$ montre que $\overline{X}\mathcal{R}\overline{U}$; comme $\overline{U}\mathcal{R}(\mathrm{int}\overline{U})$, on a $\overline{X}\mathcal{R}(\mathrm{int}\overline{U})$ et donc $\overline{X}$ est dans $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ stable par réunion dénombrable : si $M_n = X_n\Delta U_n$, alors $\bigcup_n M_n = \bigcup_n (X_n\Delta U_n)$, mais $\bigcup_n (X_n\Delta U_n) \supset \left(\bigcup_n X_n\right)\Delta\left(\bigcup_n U_n\right)$ et donc $\left(\bigcup_n X_n\right)\Delta\left(\bigcup_n U_n\right)$ est maigre.
$\mathcal{F}$ coïncide avec $Ba(E)$, la propriété est établie.

Cette caractérisation des ensembles de Baire donne une *propriété* des boréliens :

Pour tout borélien B, il existe un ouvert U tel que $B\Delta U$ soit maigre et
il existe un maigre M tel que $M\Delta U = B$ et $B\Delta M$ soit ouvert.

5) La tribu de Baire est en général plus grande que la tribu de Borel mais ne se confond pas avec $\mathcal{P}(E)$

Pour que la tribu $Ba(E)$ soit (strictement) plus grande que $\mathcal{B}(E)$, il faut et il suffit qu'il existe un maigre de E qui ne soit pas borélien. On se limitera au cas où E est un espace métrique séparable, dans lequel $\mathcal{B}(E)$ est de cardinal au plus $\aleph_1$. Supposons avoir trouvé dans E un maigre M infini non dénombrable : le cardinal de $\mathcal{P}(M)$ dépassant alors strictement $\aleph_1$, il existe un sous-ensemble X de M qui n'est pas borélien. Ce non borélien X est maigre, ce qui justifiera $Ba(E) \neq \mathcal{B}(E)$. D'autre part, le cardinal de $Ba(E)$ dépassera $\aleph_1$ car $Ba(E)$ contient $\mathcal{P}(M)$, aussi *existera-t-il infiniment plus de parties de Baire que de boréliens.*

Construction d'un maigre non borélien et non dénombrable dans $\mathbb{R}^n$ **.** Quand $n \geq 2$, une droite de $\mathbb{R}^n$ est un fermé rare non dénombrable. Curieusement, la construction est plus difficile quand $n = 1$ .Soit U l'ouvert défini par $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}]q - r(q), q + r(q)[$, les réels $r(q)$ étant > 0 et sommables : U est dense et de mesure finie, et donc $\overline{U}$ est un fermé rare de mesure non nulle donc non dénombrable.

Existence d'une partie qui n'est pas de Baire dans $\mathbb{R}$. L'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, qui n'est pas mesurable, c'est-à-dire ni borélien, ni réunion d'un borélien et d'un négligeable (mon livre, **10.3**, p. **154**) n'est pas non plus de Baire dans $\mathbb{R}$. Voir plus loin la référence pour une démonstration.

6) Détermination de l'ouvert U tel que $X\Delta U$ soit maigre

X est dans la tribu de Baire si et seulement si il existe un fermé F de E tel que $X\Delta F = (X - F) + (F - X)$ est maigre. En effet, X dans $Ba(E)$ implique $\overline{X}$ dans $Ba(E)$ et comme $\overline{X}\mathcal{R}U$ implique $X\mathcal{R}\overline{U}$, il existe donc un fermé F ($F = \overline{U}$) tel que $X\Delta F$ est maigre ; réciproquement, si $X\mathcal{R}F$, comme $F\mathcal{R}\,\mathrm{int}(F)$, X est en relation avec l'ouvert $\mathrm{int}(F)$ et donc X est de Baire.

La détermination de U se fait par la détermination de F .

Les affirmations qui vont suivre sont extraites de N. BOURBAKI*, Topologie Générale, Chapitre 9, paragraphe 5, exercices 3 et 6 de la seconde édition ; leurs démonstrations figurent dans* C. KURATOWSKI*, Topologie, volume 1, paragraphes 10 et 11.*

a) Pour tout X de $\mathcal{P}(E)$, il existe un fermé F tel que $X - F$ soit maigre

Pour $X \subset E$, soit $D(X)$ l'ensemble des x de E tels que pour tout voisinage V de x , l'intersection $V \cap X$ ne soit pas maigre. $D(X)$ est évidemment dans l'adhérence de X et est vide si X est maigre. On démontre que

$D(X)$ *est fermé et* $X - D(X)$ *est un ensemble maigre*.

b) Les parties X telles que $D(X) - X$ soit aussi maigre forment une tribu qui coïncide avec Ba(E)

On prouve que $\mathcal{T} = \{X \subset E : D(X) - X \text{ est maigre}\}$ est une tribu. $\mathcal{T} = Ba(E)$ par double inclusion :

-- si X est fermé, $D(X)$ est dans X et $D(X) - X$ est maigre puisque vide ; il en résulte que $\mathcal{T}$ contient les fermés. Mais $\mathcal{T}$ contient aussi les maigres car $D(X)$ est vide donc $Ba(E)$ est incluse dans $\mathcal{T}$

-- comme $X \Delta D(X)$ maigre et $D(X)$ fermé, X est dans la tribu de Baire et donc $\mathcal{T}$ est incluse dans $Ba(E)$.

c) $X \mathcal{R} \operatorname{int}(D(X))$ pour tout X de Baire

En effet, $X \mathcal{R} D(X)$ et $D(X) \mathcal{R} \operatorname{int}(D(X))$; cette formule s'applique donc à tout borélien.

****