12 – Limite des intégrales multiples $I_n(f)=\int_0^1\int_0^1...\int_0^1 \sqrt[n]{f(x_1x_2...x_n)}\,dx_1dx_2...dx_n$ **quand la fonction numérique** f **est continue et positive sur** $[0,1]$

On pose $M=\max\{f(x):x\in[0,1]\}$ et on supposera $M>0$ pour écarter la fonction nulle. L'encadrement $0\le I_n(f)\le M^{1/n}$ montrent que $I_n(f)$ est une suite bornée et que si la suite $I_n(f)$ converge, sa limite $L(f)$ appartient à [0,1]. On notera que, pour tout réel a de [0,1[, $\int_{[0,a]^n}\sqrt[n]{f(x_1x_2...x_n)}\,dx_1dx_2...dx_n$ est majorée par $a^nM^{1/n}$ et tend donc vers 0 ; il en est de même pour $\int_{[a,1]^n}\sqrt[n]{f(x_1x_2...x_n)}\,dx_1dx_2...dx_n$ majoré par $(1-a)^nM^{1/n}$.
La difficulté de l'étude vient donc du fait que l'on intègre sur $[0,1]^n$ tout entier.

1) Premiers résultats

• Si f ne s'annule pas sur $[0,1]$, la détermination de $L(f)$ est immédiate. En effet, il existe alors $m>0$ tels que $m\le f(x)\le M$, d'où $\sqrt[n]{m}\le I_n(f)\le\sqrt[n]{M}$: $I_n(f)$ tend vers $L(f)=1$.

• L'existence de $L(f)$ est assurée quand f est décroissante sur [0,1]. En posant $g=f/M$, on obtient $I_n(f)=M^{1/n}.I_n(g)$, d'où $L(f)=L(g)$ si ces limites existent. Comme g est à valeurs dans [0,1] et décroissante, $\sqrt[n-1]{g(x_1x_2...x_{n-1})}\le\sqrt[n]{g(x_1x_2...x_{n-1})}\le\sqrt[n]{g(x_1x_2...x_{n-1}x_n)}$. $I_n(g)$ est alors une suite *croissante*, donc convergente.

• Si f est une fonction puissance, $f(x)=x^u$ avec $u>0$, $I_n(f)=\left(\int_0^1 x^{u/n}dx\right)^n=\left(\frac{1}{1+u/n}\right)^n$ tend vers e^{-u}.
Interprétation probabiliste (voir **2)**) : l'espérance d'un produit est le produit des espérances quand il y a indépendance.

2) $I_n(f)$ **est l'espérance d'une variable aléatoire**

Dans l'intégrale multiple qui définit $I_n(f)$, les variables $x_1,x_2,...,x_n$ décrivent chacune librement l'intervalle $[0,1]$ et indépendamment les unes des autres. Soit alors Y la variable aléatoire définie sur l'univers $\Omega=[0,1]^n$, à valeurs dans $[0,1]$, par $(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)\to\prod_1^n\omega_i$. Comme f est continue sur $[0,1]$, $\sqrt[n]{f(Y)}$ est une variable aléatoire, bornée sur Ω. Son espérance est l'intégrale $\int_\Omega\sqrt[n]{f(Y)}\,dm_n$, où m_n est la mesure de Borel sur $[0,1]^n$, qui s'écrit aussi

$$\int_{[0,1]^n}\sqrt[n]{f(x_1x_2...x_n)}\,dx_1dx_2...dx_n\,.$$

Ainsi, $I_n(f)=E\left(\sqrt[n]{f(X_1X_2...X_n)}\right)$, les variables aléatoires X_i, définies par $(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)\to\omega_i$, étant uniformes et mutuellement indépendantes, à valeurs dans $[0,1]$.

2) Transformation de $I_n(f)$ **par le théorème du transfert**

Le théorème du transfert (mon livre, **14.2**, pages **224 à 226**) donne $E\left(\sqrt[n]{f(Y)}\right)=\int_0^1\sqrt[n]{f}\,dp_Y$, où p_Y est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y. Or, du fait de l'indépendance mutuelle des X_i, on démontre que

$$p(Y \le a) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^a (-\ln x)^{n-1}dx \text{ quand } a \in [0,1].$$

On en déduit

$$\boxed{I_n(f) = E\left(\sqrt[n]{f(X)}\right) = \int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}.\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx}$$

Remarque. Cette formule peut s'établir sans recourir aux probabilités ; on pourra par exemple prouver que $\int_0^1\int_0^1 \sqrt{f(xy)}\,dxdy = \int_0^1 \sqrt{f(x)}.(-\ln x)dx$ en introduisant une primitive de $\sqrt{f}$.

3) Quelques formules

Comme première conséquence de la nouvelle écriture de $I_n(f)$, si $a \in]0,1[$,

$$\int_a^1 \sqrt[n]{f(x)}.\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx \le \sqrt[n]{M}.\frac{(-\ln a)^{n-1}}{(n-1)!} \to 0 \text{, et donc}$$

$$\boxed{L(f) = \lim_n \int_0^a \sqrt[n]{f(x)}.\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx \text{ pour tout } a \in]0,1]}$$

Ce résultat montre que le comportement de f en $x=0$ est prépondérant dans le calcul de $L(f)$.

Ensuite, pour $f \equiv 1$, $\int_0^1 \frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx = 1$ pour tout $n \ge 1$, ce qu'on démontre aussi en intégrant par parties.

Enfin, pour $a \in]0,1[$, $\int_0^a \frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx = a\frac{(-\ln a)^n}{n!} + \int_0^a \frac{(-\ln x)^{n-2}}{(n-2)!}dx$, et donc

$$\boxed{\int_0^a \frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx = \sum_{k=0}^{n} a\frac{(-\ln a)^k}{k!} \text{ et } \lim_n \int_0^a \frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx = ae^{-\ln a} = 1}$$

4) Existence et calcul de $L(f) = \lim_n I_n(f)$

a) si $f(0) > 0$, $L(f)$ *existe et vaut 1*

Il existe $a > 0$ tel que $f(x) \ge f(0)/2$ sur $[0,a]$ (continuité de f en 0), et alors

$$I_n(f) \ge \int_0^a \sqrt[n]{f(x)}.\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx \ge \sqrt[n]{f(0)/2}.\int_0^a \frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx .$$

La dernière intégrale a pour limite 1 quand n tend vers l'infini ; comme $I_n(f) \le M^{1/n}$, $L(f) = 1$.

On suppose désormais $\boxed{f(0) = 0}$

b) Si $f(x) \sim k.x^u$ *au voisinage de* $x=0$ *avec* k *et* u *strictement positifs,* $L(f) = e^{-u}$.

On choisit ε tel que $0 < \varepsilon < \min(1,k)$. La fonction $g : x \to f(x)/x^u$ est continue sur $[0,1]$ et $g(0) = k > 0$:
il existe $a > 0$ tel que $k - \varepsilon \le g(x) \le k + \varepsilon$ sur $[0,a]$. On en déduit

$$\sqrt[n]{k-\varepsilon}\int_0^a x^{u/n}\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx \le \int_0^a \sqrt[n]{f(x)}.\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx \le \sqrt[n]{k+\varepsilon}\int_0^a x^{u/n}\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx .$$

On sait que $\int_0^a x^{u/n}\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx = I_n(x^u) \to e^{-u}$ quand $n \to +\infty$, donc pour $n \ge n_0$

$$\sqrt[n]{k-\varepsilon}.(e^{-u}-\varepsilon) \le \int_0^a \sqrt[n]{f(x)}.\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx \le \sqrt[n]{k+\varepsilon}.(e^{-u}+\varepsilon)$$

Pour $n \ge n_1$, $\sqrt[n]{k+\varepsilon} \le 1+\varepsilon$ et $\sqrt[n]{k-\varepsilon} \ge 1-\varepsilon$ (passer aux limites).

Pour $n \ge \max(n_0,n_1)$, $e^{-u}-3\varepsilon \le \int_0^a \sqrt[n]{f(x)}.\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx \le (1+\varepsilon)(e^{-u}+\varepsilon) \le e^{-u}+3\varepsilon$

Donc $\lim_n \int_0^a \sqrt[n]{f(x)}.\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx = e^{-u}$, et aussi $L(f) = e^{-u}$.

c) Si $x^u = o(f(x))$ *pour tout* $u>0$ *au voisinage de* $x=0$, $L(f)=1=e^{-0}$.

Le cas intéressant est u voisin de 0, car $x^u = o(f(x))$ implique $x^v = o(f(x))$ quand $v>u$.

C'est le cas de $f(x) = -1/\ln(x/2)$ (prolongée par $f(0)=0$) pour laquelle $f(x)/x^u \to +\infty$ quand u est >0.

La fonction $x \to \frac{f(x)}{x^u}$ est continue sur]0,1] et de limite $+\infty$ en $x=0$: sur $[0,a(u)]$, $f(x) \ge x^u$ et alors

$I_n(f) \ge \int_0^{a(u)} x^{u/n}\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx \to e^{-u}$ quand n tend vers l'infini. En faisant tendre u vers 0 il vient $L(f)=1$

car $I_n(f) \le M^{1/n}$.

d) *Si* $f(x) = o(x^u)$ *pour tout* $u>0$ *au voisinage de* $x=0$, $L(f)=0=e^{-\infty}$.

Le cas intéressant est u grand car $f(x)=o(x^u)$ implique $f(x)=o(x^v)$ quand $v<u$; c'est le cas de la fonction $f(x)=e^{-1/x}$, nulle et infiniment plate en $x=0$.

La fonction positive $x \to \frac{f(x)}{x^u}$, prolongée par 0 en $x=0$, étant continue sur [0,1], il existe un réel $K(u)$ tel que

$0 \le f(x) \le K(u).x^u$ et alors, à partir d'un certain rang, $0 \le I_n \le \sqrt[n]{K(u)}\left(\frac{1}{1+u/n}\right)^n \le 2.e^{-u/2}$, d'où $L(f)=0$.

****