11 - UNE APPLICATION DU THÉORÈME DE SARD

(remanié en mai 2013)

A- Le Théorème de Sard

Le théorème de Sard, dans sa version première, assure que lorsqu'une fonction f à valeurs réelles est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, l'image par f de l'ensemble Z des réels x vérifiant $f'(x)=0$ est de mesure nulle :

$$m(f(Z))=0 \text{ pour } Z=(f')^{-1}(0).$$

Comme $f(Z)$ est la réunion des $f(Z\cap[-n,n])$, il suffirait d'établir que $m\big(f(Z\cap[a,b])\big)=0$ pour tous réels a et b. Pour une démonstration, consulter **[1]**, paragraphe **10.6.2** page **160,** le point clé étant que f' est bornée sur le segment $[a,b]$. Le théorème de Sard est encore vrai si f est seulement supposée dérivable **[2]**.

B- Une propriété des images réciproques d'une fonction dérivable

Nous allons déduire du théorème de Sard que pour f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe au moins un réel x pour lequel $f^{-1}(x)$ soit au plus dénombrable. Cette affirmation étant évidente si f est injective, $f^{-1}(f(x))$ est alors de cardinal 1, ou si f n'est pas surjective, $f^{-1}(x)$ étant vide quand x n'est pas dans l'image de f, aussi va-t-on prouver davantage :

L'ensemble des x tels que $f^{-1}(x)$ soit (infini) non dénombrable est négligeable.

En général, un réel x n'a donc qu'un nombre fini ou dénombrable d'antécédents par une fonction dérivable.
On verra qu'il n'en est pas ainsi pour une fonction seulement continue.

Cette nouvelle affirmation reste évidente si f est constante car $f^{-1}(x)$ est vide pour tout les x sauf un (et aussi quand f est injective car $f^{-1}(x)$ sera de cardinal ≤ 1 pour tout x). On supposera donc f non constante, l'intervalle $J=f(\mathbb{R})$ étant alors de mesure strictement positive. Si $x\notin J$ (dans le cas où f n'est pas surjective), $f^{-1}(x)$ est vide. On sait que $f(Z)$, qui est dans J, est de mesure nulle. Soit $x\in J-f(Z)$: nous allons prouver, en deux étapes, que $f^{-1}(x)$, qui n'est pas vide, est au plus dénombrable, ce qui justifiera notre assertion.

1) $f^{-1}(x)$ est discret

L'ensemble $f^{-1}(x)$ ne rencontrant pas Z par hypothèse, il est constitué des réels u tels que $f(u)=x$ **et** $f'(u)$ non nul. Par définition, $\lim\limits_{v\to u}\dfrac{f(v)-f(u)}{v-u}=f'(u)$; comme $f'(u)$ n'est pas nul, il existe un réel $h(u)>0$ tel que

$$|v-u|<h(u) \text{ implique } |f(v)-f(u)|>\frac{1}{2}|f'(u)|\times|v-u|.$$

Il en résulte que $|v-u|<h(u)$ et $v\neq u$ impliquent $f(v)\neq f(u)$. Donc $f^{-1}(x)\cap]u-h(u),u+h(u)[=\{u\}$ et $f^{-1}(x)$ est formé de *points isolés*. Il est à noter que n'est pas intervenue la continuité de f' mais seulement son existence.

2) $card\, f^{-1}(x)\leq\aleph_0$

Montrons plus généralement que toute partie discrète A d'un espace métrique (E,d) séparable, c'est-à-dire contenant une suite D dense, est au plus dénombrable. Par hypothèse, pour chaque a de A existe $r(a)>0$ tel que

$A\cap B(a,r(a))=\{a\}$. Pour n entier ≥ 1, posons $A_n=\{a\in A:r(a)>1/n\}$: si a et b sont dans A_n, les boules $B(a,1/2n)$ et $B(b,1/2n)$ sont disjointes ; chacune de ces boules contenant un élément de la partie dénombrable D, A_n est dénombrable. Enfin, A est dénombrable puisque $A=\bigcup_1^\infty A_n$.

Donnons un exemple d'une fonction f continue sur [0,1] telle que

$f^{-1}(x)$ soit non dénombrable pour tout x de l'image de f.

On utilise la fonction de Peano (**[1]** , chapitre 8, page 136), une fonction continue et surjective de $[0,1]$ sur $[0,1]^2$ que l'on notera Ψ. Le carré $[0,1]^2$ est la réunion disjointe des segments horizontaux $C_y=[0,1]\times y$ quand *y* décrit $[0,1]$. Chaque C_y est un fermé de $\mathbb{R}^2$; Ψ étant continue, les $\Psi^{-1}(C_y)$ sont des fermés de $[0,1]$, non dénombrables, disjoints, de réunion $[0,1]$. On définit f sur [0,1] en posant $f(C_y)=y$: quand u est dans C_y, $f(u)=y$ et $f^{-1}(C_y)=y$.
Enfin, f est continue parce que f est le composé de Ψ par la projection sur l'axe des y.

C- Un résultat sur les surfaces des « courbes » du plan

Il est bien connu que l'image C de $[0,1]$ par une fonction $F(t)=\left(f(t),g(t)\right)$ de $[0,1]$ dans R^2 est d'aire nulle quand les composantes f et g sont de classe C^1 (**[1]**, page 215).
Nous allons prouver qu'il en est de même si f est seulement dérivable et g continue (ou vice-versa).

1) On sait par la partie **B)** que si $x\in f\left([0,1]\right)$ et si $f'(x)\neq 0$, alors $E_x=\{t\in[0,1]:f(t)=x\}$ est de cardinal au plus dénombrable.

2) si $y\notin g(E_x)$, alors $(x,y)\notin C$ (raisonner par contraposée) et donc $1_C(x,y)=0$.

3) L'aire de C, qui est $S=\int_{f([0,1])}\left(\int_{g([0,1])}1_C(x,y)dy\right)dx$, vaut donc $\int_{f([0,1])}\left(\int_{g(E_x)}1_C(x,y)dy\right)dx$.

On sait que pour $Z=\left(f'\right)^{-1}(0)$, $f(Z)$ est de mesure nulle. Il en résulte :

$$S=\int_{f([0,1])}\left(\int_{g(E_x)}1_C(x,y)dy\right)dx=\int_{f([0,1])-f(Z)}\left(\int_{g(E_x)}1_C(x,y)dy\right)dx.$$

Comme $g(E_x)$ est de mesure nulle quand $x\in f\left([0,1]\right)-f(Z)$, $S=0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] http://books.google.fr/books?id=kq69nXaoV-AC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false

[2] Rafik Imekraz et Dominique Malicet, **RMS 123-4**, 2012-2013, *Questions-Réponses*, **R742**.