QUELQUES PRIMITIVES DE FONCTIONS NON CONTINUES

PARTIE A

Dans toute cette partie, f désigne une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, périodique, non identiquement nulle. On désignera par T une période strictement positive de f, par F la primitive de f qui s'annule en 0 ($F(x) = \int_0^x f$), par L le réel $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$. La fonction $x \to f(1/x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, mais aucun prolongement ne peut la rendre continue sur 0. Nous allons pourtant prouver qu'un prolongement rend $f(1/x)$ primitivable sur $\mathbb{R}$:

$f(1/x)$ a une primitive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si on pose $f(0) = L = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$.

L'unicité du prolongement s'établit par l'absurde : s'il en existait deux, leur différence serait la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$; comme cette différence a une primitive, c'est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
Pour l'existence, nous donnons deux démonstrations, l'une par primitives, l'autre avec l'intégrale. Les deux preuves utilisent un *lemme* sur les fonctions f continues de période T :

Si $F(x) = \int_0^x f$ *, il existe un réel* M *tel que* $\left|F(x) - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)dt\right| \le M$ *;*

en conséquence, $F(x)/x \to L$ *et* $F(x)/x^2 \to 0$ *quand* $x \to \infty$*,* $L = \frac{1}{T}\int_0^T f$ *.*

En effet, la fonction $x \to \int_0^x f(t)dt - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)dt$ est de période T ; comme elle est continue, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Preuve avec l'intégrale

Cette démonstration repose sur l'écriture intégrale, permise ici, d'une primitive de $f(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$: $\int_0^x f(1/t)dt$.

Il s'agit de montrer que cette primitive a pour dérivée L en $x = 0$ et donc que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(1/t)dt = L$. On peut se borner à la limite à droite car, pour $x < 0$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(1/t)dt = \frac{1}{-x}\int_0^{-x} f(-1/t)dt$ et comme la fonction $x \to f(-x)$ est continue et de période T :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\int_0^x f(1/t)dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x f(-1/t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(-t)dt = \frac{-1}{T}\int_0^{-T} f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = L \text{ encore.}$$

Le changement de variable $t \leftarrow 1/t$ donne $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x f(1/t)dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_{1/x}^{+\infty} f(t)/t^2dt = \lim_{X\to+\infty} X.\int_X^{+\infty} f(t)/t^2dt$.

En intégrant par parties, $\int_X^{+\infty} f(t)/t^2dt = \left[\frac{F(t)}{t^2}\right]_X^{+\infty} + 2\int_X^{+\infty} F(t)/t^3dt = \frac{-F(X)}{X^2} + 2\int_X^{+\infty} F(t)/t^3dt$, d'où

$$X\int_X^{+\infty} f(t)/t^2dt = -F(X)/X + 2X\int_X^{+\infty} F(t)/t^3dt .$$

L'encadrement $\frac{L}{t^2} - \frac{M}{t^3} \le \frac{F(t)}{t^3} \le \frac{L}{t^2} + \frac{M}{t^3}$ permet d'obtenir $2L - M/X \le 2X\int_X^{+\infty} F(t)/t^3dt \le 2L + M/X$

et enfin $X\int_X^{+\infty} f(t)/t^2dt \to -L + 2L = L$, ce qui achève la démonstration.

Preuve par primitives

Soit $g(x)=x^2.F(1/x)$, où rappelons-le $F(x)=\int_0^x f$, et $g(0)=0$: g est continue sur $\mathbb{R}$ et $g'(0)=L$.

Posons $h(x)=x.F(1/x)$ et $h(0)=L$: h est continue sur $\mathbb{R}$ et possède donc une primitive H sur $\mathbb{R}$.

Pour $x\neq 0$, $g'(x)=2h(x)-f(1/x)$, aussi $f(1/x)$ a pour primitive sur $\mathbb{R}^*$ la fonction $\Psi(x)=2H(x)-g(x)$.

$\Psi(0)=2H(0)$ et $\Psi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2H(x)-g(x)-2H(0)}{x}=2h(0)-g'(0)=2L-L$: Ψ est donc une primitive de $f(1/x)$ sur $\mathbb{R}$ quand $f(1/x)$ est prolongée par L en 0.

Exemples

Les trois fonctions $\sin(1/x)$, $|\sin(1/x)|$, $\sin^2(1/x)$, prolongées convenablement en 0, ont des primitives sur $\mathbb{R}$:

- $\sin(1/x)$ par 0 car $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(t)dt=0$;
- $|\sin(1/x)|$ par $\dfrac{2}{\pi}$ puisque $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt=\dfrac{2}{\pi}$;
- $\sin^2(1/x)$ par $\dfrac{1}{2}$ parce que $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2(t)dt=\dfrac{1}{2}$.

PARTIE B

Si la fonction $\sin(1/x)$, prolongée par 0, a une primitive sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0,+\infty[$, la fonction $\sin(\ln x)$ n'a pas de primitive sur $[0,+\infty[$ .En effet $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\sin(\ln t)dt$ est sans limite quand $x\to 0^+$: le changement de variable $u=-\ln t$ donne $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\sin(\ln t)dt=\dfrac{1}{x}\int_{-\ln x}^{+\infty}\dfrac{-\sin u}{e^u}dt=\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{\cos x+\sin x}{2e^x}\right]_{-\ln x}^{+\infty}=\dfrac{\sin(\ln x)-\cos(\ln x)}{2}$ et comme $\dfrac{\sin(\ln x)-\cos(\ln x)}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\ln x-\pi/4)$, $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\sin(\ln t)dt$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

D'où la **question** : f étant une fonction définie et continue sur $]0,+\infty[$, de limite infinie en 0^+, la fonction $\sin(f(x))$, qui a une primitive sur $]0,+\infty[$ et n'a pas de prolongement continu en 0, a-t-elle une primitive sur $[0,+\infty[$, ce qui équivaut à $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\sin(f(t))dt$ a-t-elle une limite finie quand $x\to 0^+$?

Nous ferons d'emblée les *hypothèses* suivantes : f est monotone et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, $f'>0$ **et** décroissante ou $f'<0$ **et** croissante. La fonction f est donc convexe ou concave, f' ne changeant pas de signe et étant monotone. Les deux idées principales de la démonstration qui suit sont dues à **Guy Boizet**.

Fixons a dans $]0,x[$ et écrivons $\displaystyle\int_a^x\sin(f(t))dt$ sous la forme $\displaystyle\int_a^x f'(t)\sin(f(t))\times\frac{1}{f'(t)}dt$ ($1/f'$ est continue) ; puisque $1/f'$ est monotone sur $[a,x]$ par hypothèse, on a droit à la *deuxième formule de la moyenne* :

il existe $c\in[a,x]$ *tel que* $\displaystyle\int_a^x f'(t)\sin(f(t))\times\frac{1}{f'(t)}dt=\frac{1}{f'(a)}\int_a^c f'(t)\sin(f(t))dt+\frac{1}{f'(x)}\int_c^x f'(t)\sin(f(t))dt$.

Comme $\left|\int_\alpha^\beta f'(t)\sin f(t)dt\right| = |\cos f(\alpha) - \cos f(\beta)| \leq 2$ pour tous α et β,

$$\left|\int_a^x f'(t)\sin(f(t)) \times \frac{1}{f'(t)}dt\right| \leq 2\left(\frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{|f'(x)|}\right)$$

et grâce à l'hypothèse faite sur le signe et la monotonie de f', $2\left(\frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{|f'(x)|}\right) \leq \frac{4}{|f'(x)|}$.

Il vient alors $\left|\frac{1}{x}\int_a^x \sin(f(t))dt\right| \leq \frac{4}{x|f'(x)|}$; en faisant tendre le paramètre a vers 0, on aboutit à

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x \sin(f(t))dt\right| \leq \frac{4}{x|f'(x)|}.$$

Donc, si de plus $\lim\limits_{x\to 0^+} x.|f'(x)| = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \sin(f(t))dt = 0$. En conclusion,

$\sin(f(x))$ prolongée par 0 a une primitive sur $\mathbb{R}^+$ si f est C^1 sur $]0,+\infty[$ et de limite infinie en 0^+, f' ne changeant pas de signe et étant monotone avec de plus $\lim\limits_{x\to 0^+} x.|f'(x)| = +\infty$.

C'est le cas quand $f(t) = 1/t$: f' est négative et croissante, $x|f'(x)| = 1/x$ tend vers $+\infty$ en 0^+.

La deuxième formule de la moyenne

Les fonctions f et g étant continues sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que

a) $\int_a^b fg = g(a)\int_a^c f$ quand g est positive **et** décroissante (ou g négative **et** croissante) ;

b) $\int_a^b fg = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f$ quand g est monotone.

Montrons simplement ici que a) implique b).
Si g décroît, par exemple, alors la fonction $x \to g(x) - g(b)$ est décroissante positive. Il existe donc $c \in [a,b]$ tel que

$\int_a^b f(x)(g(x) - g(b))dx = (g(a) - g(b))\int_a^c f(x)dx$, d'où $\int_a^b fg = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f$.