09 - FONCTIONS STRICTEMENT CROISSANTES À DÉRIVÉES QUI S'ANNULENT

A) Introduction

Toutes les fonctions de cet article sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et, sauf au paragraphe **E)**, définies sur $\mathbb{R}$. Pour une telle fonction f, on note $Z(f)$ l'ensemble $f^{-1}(0)$ des zéros de f ; si f est dérivable, $Z(f')$ est donc l'ensemble des zéros de f'. Quand f est de classe C^1, $Z(f')$ est un fermé de $\mathbb{R}$, sinon $Z(f')$ est un G_δ [1](une intersection dénombrable d'ouverts) car toute fonction dérivée est limite simple d'une suite de fonctions continues , à savoir

$$\frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}.$$

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que $f'>0$ implique que f croît strictement, mais cette condition n'est pas nécessaire : la fonction $x \to x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée s'annule en $x=0$. Il en de même si les zéros de f' sont isolés : les primitives de $|\sin(x)|$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

Soit f croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$. Si f n'est pas strictement croissante, il existe $a<b$ tels que $f(a)=f(b)$, et donc f' vaut 0 sur $]a,b[$: il en résulte que $Z(f')$ a la puissance du continu et est d'intérieur non vide. On en déduit par exemple :

1) La fonction $x \to \sin^2(1/x)$, prolongée par 1/2 en $x=0$, ayant une primitive f sur $\mathbb{R}$ (démonstration sur http://www.daniel-saada.eu/fichiers/10-primitives.pdf), f est strictement croissante car sa dérivée ne s'annule qu'un nombre dénombrable de fois (bien que 0 soit un point d'accumulation de $Z(f')$).

2) Si F est un fermé *d'intérieur vide* de $\mathbb{R}$, toute primitive f de la fonction *continue* $x \to d(x,F)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $Z(f')$ est exactement F. Un fermé d'intérieur vide s'obtient en prenant le complémentaire d'un ouvert dense, par exemple $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}]q-r(q),q+r(q)[$, les réels $r(q)$ étant >0.

Le but de cette note est de construire une fonction h dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $Z(h')$ soit à la fois dense et de mesure non nulle, donc ni fermé ni dénombrable.
Il en résultera que, h n'étant pas à dérivée continue, $Z(h')$ est en outre un G_δ.

B) Il existe des fonctions f dérivables et strictement croissantes telles que $Z(f')$ soit de mesure non nulle mais non dense

Rassemblons les rationnels de $\mathbb{R}$ en une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$: l'ouvert $\bigcup_{\mathbb{N}}]q_n-1/2^n, q_n+1/2^n[$ est dense et de mesure finie, son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est un fermé F d'intérieur vide et de mesure infinie. Si f est une primitive de la fonction $x \to d(x,F)$, f sera strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (bien que sa dérivée s'annule un nombre *non dénombrable* de fois, F ne pouvant être dénombrable). $Z(f')=F$ étant fermé et différent de $\mathbb{R}$ ne peut être dense.
On remarquera que ces fonctions f étant C^1 sur $\mathbb{R}$, le théorème de Sard assure que $f(F)$ est de mesure nulle bien que F ne soit pas négligeable, tandis que f^{-1}, continue mais non dérivable, transforme le négligeable $f(F)$ en F de mesure non nulle.

[1] On pourra consulter http://books.google.fr/books?id=kq69nXaoV-AC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false p. 178.

C) Il existe une fonction G dérivable et strictement croissante telle que $Z(G')$ soit dense mais de mesure nulle

A la différence des fonctions f précédentes, une telle fonction G ne peut être C^1 sur $\mathbb{R}$. Nous construirons G au moyen de la fonction qui sera sa dérivée, à savoir :

$g(x) = \inf\left\{d(x,E_k)^{1/k} : k \in \mathbb{N}^*\right\}$, où E_k est l'ensemble fermé discret $\left\{p/2^k : p \in \mathbb{Z}\right\}$.

Les E_k forment une suite croissante pour la réunion et pour tout x, il existe un entier p tel que $x \in [\frac{p}{2^k}, \frac{p}{2^{k+1}}[$, d'où $d(x,E_k) \leq 1/2^{k+1}$. On en déduit d'une part que $0 \leq g \leq 1/2$, d'autre part que la suite $k \to d(x,E_k)$ tend vers 0 en décroissant. En élevant $d(x,E_k)$ à la puissance $1/k$, on empêche, comme on le verra, $d(x,E_k)^{1/k}$ de tendre vers 0 pour tout x ; nous désignerons par g_k la fonction continue $x \to d(x,E_k)^{1/k}$.

La fonction g s'annule évidemment sur $E = \bigcup_1^\infty E_k$ mais n'est pas *identiquement nulle*. En effet, soit D l'ensemble $\left\{m/3^n : m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$: pour tout $x = m/3^n$ *non entier* de D, $|x - p/2^k| \geq 3^{-n}2^{-k}$ car l'entier $(m.2^k - p.3^n)$ ne peut pas être nul (théorème de Gauss) et alors $g(x) \geq 1/(2.3^n) > 0$ (n est fixe). Comme E est dense ($d(x,E) = 0$ pour tout x), il en résulte que g est discontinue en tout point où elle ne s'annule pas. Ces discontinuités sont toutes «de deuxième espèce», car il n'y a, par le même argument de densité, ni limite à droite ni limite à gauche en chaque point de non nullité de g.

Points de continuité de g. Pour t réel, définissons $\{g \geq t\} = \{x : g(x) \geq t\}$ et $\{g < t\} = \{x : g(x) < t\}$. Chaque $\{g \geq t\}$ étant l'intersection sur l'indice k des ensembles $\{g_k \geq t\}$, il en résulte que $\{g \geq t\}$ est fermé pour tout t, et que $\{g < t\}$ est donc ouvert, ce qu'on peut vérifier directement puisque

$$\{g < t\} = \left\{\bigcup_{p,k}]p.2^{-k} - t^k, p.2^{-k} + t^k[: p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un réel $h > 0$ tel que $]x_0 - h, x_0 + h[\subset \{g < g(x_0) + \varepsilon\}$. Si $g(x_0) = 0$, on a $g(x) < \varepsilon$ sur $]x_0 - h, x_0 + h[$, et comme g est positive, g est continue en x_0.
L'ensemble des points de continuité de g est donc $Z(g)$.

$Z(g)$ est un G_δ de mesure nulle. La fonction g étant la limite de la suite des fonctions continues $\min(g_1,...,g_n)$, on en déduit que $Z(g)$ est un G_δ. D'après le théorème de Baire, un G_δ de $\mathbb{R}$ ne peut pas se confondre avec la partie dénombrable dense E qui est un F_σ (une réunion dénombrable de fermés) : g s'annule donc nécessairement en dehors de E. Par exemple, si $x = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n!}$, $d(x, E_{n!}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+k)!} \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)!}$ grâce à $(n+k)! \geq (n+1)! + k!$ quand $k \geq 2$; on a donc $g(x) = 0$ sans que x appartienne à E, ce point est facile à vérifier.

Pour établir la négligeabilité de $Z(g)$, il suffit de montrer que pour tout N, $X = Z(g) \cap [-N,N]$ est négligeable. Or X est l'intersection des $X_n = \{x \in [-N,N] : g(x) < 1/n\}$ *pour* $n \geq 3$. Pour chaque x dans X_n, il existe k tel que $d(x,E_k) \leq 1/n^k$ et donc existe u dans E_k tel que $|x - u| \leq 1/n^k$. Ces réels u sont nécessairement dans $[-N - 1/2^k, N + 1/2^k]$ et leur nombre est $(2N + 2/2^k).2^k + 1 = 3 + 2N.2^k$ .Chaque X_n est donc contenu dans une réunion double de « boules », d'intervalles en fait, $\bigcup_{k \geq 1} \bigcup_u B(u, 1/n^k)$; la mesure de $\bigcup_u B(u, 1/n^k)$ est inférieure ou égale à $(3 + 2N.2^k).2/n^k = 6/n^k + 4N.(2/n)^k$. La mesure de X_n est donc inférieure ou égale à $6\sum_{k=1}^{\infty}(1/n)^k + 4N.\sum_{k=1}^{\infty}(2/n)^k = \dfrac{6}{n-1} + \dfrac{8N}{n-2}$: il en résulte que chaque X, et par contrecoup $Z(g)$, sont de mesure nulle.

Construction de la fonction G. La fonction g étant mesurable et bornée, elle est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$, aussi $G(x)=\int_0^x g$ est-elle définie pour tout réel x (comme la suite des fonctions $\min(g_1,...,g_n)$ tend vers g en décroissant, on a même $G(x)=\lim_n \int_0^x \min(g_1,...,g_n)$ pour tout x, mais cette limite ne sera pas exploitée). Nous allons prouver que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est g.

G est dérivable en tout x_0 en lequel g s'annule et $G'(x_0)=g(x_0)=0$. On a vu que pour tout $\varepsilon>0$ existait un réel $h_1>0$ tel que $]x-h_1,x+h_1[\subset\{g<g(x)+\varepsilon\}$. Si $0<h<h_1$, alors

$$0\le\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}g(x)dx\le\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(g(x)+\varepsilon)dx=g(x)+\varepsilon.$$

Quand x est un zéro x_0 de g, $g(x_0)=0$, il vient immédiatement $G'(x_0)=0$ *à droite* ; le lecteur prouvera de même que $G'(x_0)=0$ *à gauche*, ou il invoquera le théorème selon lequel une intégrale est dérivable en tout point où la fonction qu'on intègre est continue.

G est dérivable en tout x_0 en lequel $g(x_0)>0$ et $G'(x_0)=g(x_0)$ (bien que g ne soit <u>pas</u> continue en x_0).
La démonstration qui suit est due au professeur **Jean Saint-Raymond**, de l'Université **Paris VI**.
On se bornera, comme précédemment, à la dérivée à droite.

Fixons ε dans $]0,g(x_0)[$ et posons $t=g(x_0)-\varepsilon$; les inégalités $0<t<g(x_0)\le 1/2$ induisent $0<2t<1$ et $\varepsilon<1/2$. De plus, pour tout $k\ge1$, $d(x_0,E_k)\ge\left(g(x_0)\right)^k=(t+\varepsilon)^k>t^k$ et donc, pour tout u de E_k, $|x_0-u|>t^k$.
Pour $h>0$, on découpe l'intervalle d'intégration $[x_0,x_0+h]$ en la réunion disjointe

$$[x_0,x_0+h]\cap\{g\ge t\}+[x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}$$

de sorte que $\dfrac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h}=\dfrac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]\cap\{g\ge t\}}g(x)dx+\dfrac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}}g(x)dx$
et que $m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g\ge t\}\right)+m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}\right)=h$,
$m(A)$ étant la mesure de Lebesgue d'un borélien A de $\mathbb{R}$.

Étape 1 : la limite de $\dfrac{m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g\ge t\}\right)}{h}$, quand h positif tend vers 0, est 1.
On va plutôt prouver que $\lim_{h\to0^+}m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}\right)/h=0$, en utilisant la décomposition

$$[x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}[x_0,x_0+h]\cap\{g_k<t\}$$

qui permet de majorer $m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}\right)$ par $\sum_{k=1}^{\infty}m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g_k<t\}\right)$.

L'intersection $[x_0,x_0+h]\cap\{g_k<t\}$ est l'ensemble des réels x de $[x_0,x_0+h]$ pour lesquels existe une graduation u de E_k telle que $|x-u|<t^k$; soit U_k l'ensemble de ces u. Aucun u de U_k n'est $\le x_0$ car sinon $x_0-u\le x-u<t^k$, aussi U_k est inclus dans $]x_0,x_0+h+t^k[\cap E_k$ et son cardinal majoré par $1+2^k(h+t^k)$. Si u est un élément de U_k, l'inégalité $u-x_0\le|u-x|+x-x_0$ entraîne $(t+\varepsilon)^k<t^k+h$, donc $[x_0,x_0+h]\cap\{g_k<t\}$ sera **vide** pour les indices k tels que $h>(t+\varepsilon)^k-t^k$. La suite $k\to(t+\varepsilon)^k-t^k$ étant décroissante, si $h\le(t+\varepsilon)^q-t^q$ pour un entier q (ce qui arrivera nécessairement puisque $\lim_{q\to+\infty}\left((t+\varepsilon)^q-t^q\right)=0^+$), alors $k>q$. Pour un tel h et puisque $0<t<1/2$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g_k<t\}\right)\leq \sum_{k>q} m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g_k<t\}\right)\leq \sum_{k>q} 2t^k.(1+2^k h+2^k t^k)$$, d'où

$$m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}\right)\leq \sum_{k>q} 2t^k+2h\sum_{k>q}(2t)^k+2\sum_{k>q}(2t^2)^k\leq 4\sum_{k>q} t^k+2h\sum_{k>q}(2t)^k$$, et

$$m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}\right)\leq \frac{4}{1-t}t^{q+1}+\frac{2h}{1-2t}(2t)^{q+1}\leq \frac{2}{1-t}t^q+\frac{2h}{1-2t}(2t)^q.$$

Soit r assez grand pour que $(2t)^r<\varepsilon(1-2t)$ et que $\left(\dfrac{t}{t+\varepsilon}\right)^r<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$ et soit $h_2=(t+\varepsilon)^r/2$.

Si $0<h<h_2$, on a, en posant $q=\max\left\{j\in\mathbb{N}:h<(t+\varepsilon)^j/2\right\}$: $q\geq r$, $h\geq(t+\varepsilon)^{q+1}/2$,

donc $t^q\leq\varepsilon(t+\varepsilon)^q\leq\dfrac{2\varepsilon}{t+\varepsilon}h$, $h\leq(t+\varepsilon)^q-t^q$, donc $m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}\right)\leq\dfrac{2}{1-t}t^q+\dfrac{2h}{1-2t}(2t)^q$.

Comme $q\geq r$ et $t<g(x_0)$:

$$m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}\right)\leq\frac{2}{1-t}t^q+\frac{2h}{1-2t}(2t)^r\leq\frac{2}{1-t}\frac{2\varepsilon}{t+\varepsilon}h+\frac{2h}{1-2t}\varepsilon(1-2t),$$

et enfin $$\frac{m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}\right)}{h}\leq 2\varepsilon+\frac{4\varepsilon}{(1-t)(t+\varepsilon)}\leq\varepsilon\left(2+\frac{4}{g(x_0)(1-g(x_0))}\right).$$

Comme $m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}\right)/h\geq 0$, on a bien $\lim\limits_{h\to 0^+} m\left([x_0,x_0+h]\cap\{g<t\}\right)/h=0$. On montrerait de même que $\lim\limits_{h\to 0^+} m\left([x_0-h,x_0]\cap\{g<t\}\right)/h=0$ (on aurait aussi pu montrer $\lim\limits_{h\to 0^+} m\left([x_0-h,x_0+h]\cap\{g<t\}\right)/2h=0$).

Étape 2 : la limite de $\dfrac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h}$, quand h positif tend vers 0, est $g(x_0)$.

Comme g et h sont positifs, $\dfrac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h}\geq\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{[x_0,x_0+h]\cap\{g\geq t\}} g(x)dx\geq\dfrac{t}{h}m([x_0,x_0+h]\cap\{g\geq t\})$

On peut donc affirmer que sur $]0,h_2[$,

$$\frac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h}\geq\frac{t}{h}(h-h.\varepsilon.\theta)=(g(x_0)+\varepsilon)(1-\varepsilon.\theta)=g(x_0)-\varepsilon(1+\theta.g(x_0))$$

et en définitive, $\dfrac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h}\geq g(x_0)-10\varepsilon$ car $0<g(x_0)\leq 1/2$.

Comme il avait été établi que, sur un $]0,h_1[$, $\dfrac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h}\leq g(x_0)+\varepsilon$,

$$0<h<\min(h_1,h_2) \text{ implique } g(x_0)-10\varepsilon\leq\frac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h}\leq g(x_0)+\varepsilon.$$

On a bien démontré que la dérivée à droite de G en x_0 est $g(x_0)$ pour tout x_0 de $\mathbb{R}$. Il en est de même de la dérivée à gauche. La fonction G est donc une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

En conclusion, G est croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée g est positive, strictement croissante car $g>0$ sur la partie dense $(D-\mathbb{Z})$, tandis que $Z(G')=Z(g)$ est dense et négligeable.

D) Il existe une fonction h dérivable et strictement croissante telle que $Z(h')$ soit dense et de mesure non nulle

L'idée (que m'a communiquée encore **Jean Saint-Raymond**) est de trouver une fonction dérivable h dont la dérivée h' est le produit de la fonction g définie en **C)** par une fonction F à dérivée continue que nous allons définir : $h'=F.g$ et donc $Z(h')=Z(F)\cup Z(g)$.

En **C)**, nous avons introduit $D=\{m/3^n : m\in\mathbb{Z} \text{ et } n\in\mathbb{N}\}$: D est une partie dénombrable, dense du fait de l'écriture en base trois de tout réel, g ne s'annulant pas sur $(D-\mathbb{Z})$. Montrons maintenant que dans le complémentaire de D existe un compact K de mesure positive : on entoure chaque point de D par un intervalle ouvert de longueur $1/2^n$; la réunion de ces intervalles ouvert est un ouvert dense de mesure finie ; le complémentaire de cet ouvert est un fermé X d'intérieur vide et de mesure infinie. Comme X est la réunion croissante des $X\cap[-n,n]$, il existe un entier n tel que le compact $K=X\cap[-n,n]$ soit de mesure > 0.

Montrons ensuite qu'il existe une fonction F positive et C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $Z(F)=K$. Le complémentaire de K dans $\mathbb{R}$ est un ouvert U, lequel est donc réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. L'un de ces intervalles ouverts est $]-\infty,m[$ où m est le minimum de K, un autre est $]M,+\infty[$ où M est le maximum de K, de sorte que $U=]-\infty,m[+]M,+\infty[+\sum_1^\infty]a_n,b_n[$, avec $]a_n,b_n[\subset]m,M[$, et que $K=[m,M]-\sum_1^\infty]a_n,b_n[$. On définit F sur $\mathbb{R}$ en posant

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ sur K} \\ (x-m)^2 \text{ sur }]-\infty,m[\\ (x-M)^2 \text{ sur }]M,+\infty[\\ (x-a_n)^2(x-b_n)^2 \text{ sur chaque }]a_n,b_n[. \end{cases}$$

F est évidemment de classe C^1 sur U, positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, et $Z(F)=K$.

1) *F est dérivable sur $\mathbb{R}$*

Montrons d'abord qu'il existe une constante *C* telle que $F(x)\le C.d(x,K)^2$ sur $\mathbb{R}$. Sur K, les deux membres de l'inégalité sont nuls ; si $x<m$ ou $x>M$, $F(x)=d(x,K)^2$. Si $a_n<x<b_n$, $d(x,K)^2=\min\{(x-a_n)^2,(x-b_n)^2\}$ et alors $F(x)=(x-a_n)^2(x-b_n)^2\le\dfrac{(b_n-a_n)^2}{4}d(x,K)^2$. Comme $]a_n,b_n[\subset]m,M[$, on a $F(x)\le C.d(x,K)^2$ pour tout *x* si $C=\max(1,\dfrac{(M-m)^2}{4})$. On en déduit que F est dérivable en tout x_0 de K car $|F(x)-F(x_0)|=F(x)$ et $F(x)\le C.d(x,K)^2\le C.(x-x_0)^2$ impliquent $\left|\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\right|\le C|x-x_0|$, F dérivable en x_0 et $F'(x_0)=0$.

F, qui était dérivable sur U, est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) *F est C^1 sur $\mathbb{R}$*

Montrons d'abord qu'il existe une constante C' telle que $F'(x)\le C'.d(x,K)$ sur $\mathbb{R}$. Sur K, les deux membres sont nuls en vertu de **a)**, si $x<m$ ou $x>M$, $F'(x)=2d(x,K)$, si $a_n<x<b_n$, $d(x,K)=(x-a_n)$ ou (b_n-x) et $F'(x)=2(x-a_n)(x-b_n)^2+2(x-a_n)^2(x-b_n)\le 4(b_n-a_n)^2.d(x,K)$: on peut donc prendre $C'=\max(2,4(M-m)^2)$. Il en résulte que F' est continue en tout x_0 de K car quand $x\to x_0$, $d(x,K)$ tend vers $d(x_0,K)=0$ et $|F'(x)-F'(x_0)|=F'(x)\le C'.d(x,K)$.

F, qui était de classe C^1 sur U, est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Construction de la fonction h. Puisque $G.F'$ est continue, donc dérivée d'une de ses primitives L, on a

$$(FG)'=F'G+Fg=L'+Fg$$

ce qui montre que Fg est la dérivée de $h=FG-L$. En conclusion :

3) $h'=F.g$ est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule identiquement sur aucun intervalle non réduit à un point car g et F sont >0 sur la partie dense $(D-\mathbb{Z})$;

4) $Z(h') = Z(F) \cup Z(g)$ est dense parce que $Z(g)$ l'est et de mesure > 0 car $K = Z(F)$ l'est.

E) il est impossible que $Z(f')$ soit de mesure 1 si f est définie et strictement croissante sur $[0,1]$

Montrons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable et strictement croissante, telle que la mesure de $Z(f')$ soit $\geq 1-\varepsilon$.

Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ la suite des rationnels de $]0,1[$ et U l'ouvert $\bigcup_{n\geq 1}]r_n - \varepsilon_n, r_n + \varepsilon_n[$, avec $\varepsilon_n = \min\left\{\varepsilon / 2^{n+1}, r_n, 1-r_n\right\}$:

U est contenu dans $[0,1]$, dense, de mesure au plus ε. Son complémentaire dans $[0,1]$ est un fermé F de mesure $\geq 1-\varepsilon$. Toute primitive f de la fonction continue $x \to d(x,F)$ est strictement croissante sur $[0,1]$ et le fermé $Z(f')$ est de mesure $\geq 1-\varepsilon$.

En revanche, si $Z(f')$ est de mesure 1, f ne peut être strictement monotone sur $[0,1]$.
Par commodité, posons $Z = Z(f')$ et $\overline{Z}$ le complémentaire de Z dans $[0,1]$. Remarquons que $Z(f')$ n'est pas fermé, sauf quand f est constante, que $\overline{Z}$ est de mesure nulle et donc que Z est dense dans $[0,1]$, enfin que f n'est pas C^1 sur $[0,1]$.

1) *f' a des points de continuité sur $[0,1]$.*

En effet, $f'(x)$ est la limite simple de la suite des fonctions continues $\dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$ sur l'espace métrique complet $[0,1]$. D'après le théorème de Baire, f' a une infinité de points de continuité (lesquels contiennent même un G_δ dense de $[0,1]$).

2) *f est constante sur un intervalle de longueur non nulle.*

Soit a un point de continuité de f'. Il existe alors un intervalle $[a,a+h]$ non réduit à un point sur lequel f' est bornée. De ce fait, f' est intégrable sur $[a,a+h]$ et $f(x)-f(a) = \int_a^x f'$ sur $[a,a+h]$ (si K est un majorant de f' sur $[0,1]$, $\left|\dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}\right| \leq K$ et on applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue).

Or $f(x)-f(a) = \int_{[a,x]\cap Z} f' + \int_{[a,x]\cap \overline{Z}} f' = 0$ car f' est nulle sur $[a,x]\cap Z$ et $[a,x]\cap\overline{Z}$ est négligeable. La fonction f est donc constante sur $[a,a+h]$.

****