07 - SOUS-ESPACES VECTORIELS MAIGRES

www.daniel-saada.eu

(remanié en décembre 2012)

Soit (E,N) un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E :

1) si F est distinct de E, F est d'intérieur vide ;

2) si F n'est pas dense dans E, F est rare car son adhérence $\overline{F}$ est un sous-espace fermé et distinct de E ;

3) si F est de dimension finie et distinct de E, F est rare car fermé et d'intérieur vide ;

4) si F est de dimension dénombrable, F est maigre car réunion dénombrable de sous-espaces de dimension finie, et même rare si F n'est pas dense ;

5) si (E,N) est complet, il n'est pas maigre en vertu du Théorème de Baire ; si E n'est pas de dimension finie, sa dimension excède le dénombrable.

Construction de sous-espaces maigres ni rares ni de dimension dénombrable

Soit (E,N_2) un espace vectoriel complet pour la norme N_2, F un sous-espace vectoriel *dense et distinct* de E. On suppose qu'il existe une norme N_1 pour laquelle F est complet et telle que $N_2 \le kN_1$. Alors

F est maigre dans (E,N_2), sans être ni rare ni à base dénombrable.

DÉMONSTRATION

6) F n'est pas rare car il est dense dans E ;

7) F n'est pas de dimension finie, sinon F serait égal à E, et il ne peut être à base infinie dénombrable car il existe une norme pour laquelle il est complet ;

8) F est maigre en vertu d'un **Théorème de Banach ([1], § 12.16.8)** :

Si u est une application linéaire continue d'un Banach E dans un Banach F,

ou bien $u(E)=F$, ou bien le sous-espace $u(E)$ est maigre dans F.

En effet, soit $u = id$ de (F,N_1) dans (E,N_2) : u est linéaire, continue car $N_2 \le kN_1$, $u(F)=F\neq E$, donc F est maigre dans E.

Remarques. Si $u(E)$ n'est pas dense dans F, le Théorème de Banach est un truisme car $u(E)$ est rare. Il en est de même si $u(E)$ est de dimension dénombrable, car alors $u(E)$ est évidemment maigre.

Exemple d'un sous-espace maigre ni rare ni de dimension dénombrable

9) Soit $E = l^2(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable : muni de la norme $N_2 = \left(\sum_{\mathbb{N}} x_n^2\right)^{1/2}$, E est complet. Soit $F = l^1(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des séries absolument convergentes : muni de la norme

$N_1 = \sum_{\mathbb{N}} |x_n|$, F est complet.
$l^1(\mathbb{N})$ est un sous-espace de $l^2(\mathbb{N})$ car $\sum_{\mathbb{N}} |x_n| < +\infty$ implique $\sum_{\mathbb{N}} x_n^2 < +\infty$; de plus, $F \neq E$ car la suite $(x_n = 1/n)$ est dans $l^2(\mathbb{N})$ mais n'est pas dans $l^1(\mathbb{N})$.
$l^1(\mathbb{N})$ est dense dans $\left(l^2(\mathbb{N}), N_2\right)$ car les suites à support fini appartiennent à $l^1(\mathbb{N})$ et sont denses dans $\left(l^2(\mathbb{N}), N_2\right)$. Il en résulte que $l^1(\mathbb{N})$ n'est pas rare dans $\left(l^2(\mathbb{N}), N_2\right)$, ni de base dénombrable puisqu'il est complet pour la norme N_1. Montrons que $l^1(\mathbb{N})$ est maigre dans $\left(l^2(\mathbb{N}), N_2\right)$: l'injection canonique u de (F, N_1) dans le sur-espace (E, N_2) est linéaire, continue car $\sum_{\mathbb{N}} x_n^2 \leq \left(\sum_{\mathbb{N}} |x_n|\right)^2$, $u(F) = F$ n'est pas E, donc F est maigre dans E.

Merci à **Michel WIRTH** qui m'a communiqué cet exemple.

Construction de sous-espaces non maigres

10) Tout espace de Banach B de dimension infinie contient des sous-espaces denses non maigres

Soit $(b_i)_{i\in I}$ une base de B : I étant infini non dénombrable, il contient une partie dénombrable $D = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
I est la réunion dénombrable des parties propres $I_n = I - \bigcup_{k\geq n} b_k$: il en résulte que B est la réunion croissante des sous-espaces propres $X_n = Vect(I_n)$. Si tous les X_n étaient maigres, B le serait : il existe donc un entier n_0 tel que X_{n_0} soit non maigre et pour $n \geq n_0$, X_n est également non maigre ; de ce fait, il est dense.
L'intérêt des sous-espaces non maigres résulte de la propriété suivante :

11) Tout sous–espace non maigre d'une espace normé a la propriété de Baire ([2], chap. 4)

Soit E un espace normé (pas nécessairement complet) et X un sous-espace non maigre. Nous allons prouver

Si F_n est une suite de fermés de X sans point intérieur dans X, il en de même de la réunion des F_n

Commençons par rappeler que X est dense dans E et que, par conséquent, pour tout ouvert U de E non vide, $U \cap X \neq \varnothing$. Rappelons aussi que tout fermé pour X s'écrit $F \cap X$, où F est un fermé de E.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\bigcup_n (F_n \cap X)$ contient un ouvert non vide de X : il existe alors une boule ouverte $B(a,r)$ de E telle que $B(a,r) \cap X \subset \bigcup_n (F_n \cap X)$. On ne nuit pas à la généralité en supposant $a = 0$. Comme $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(B(0,kr) \cap X\right)$, $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_n (kF_n \cap X)$. Il en résulte que X est inclus dans la réunion dénombrable des fermés $(kF_n)_{k,n}$. X étant non maigre, il en est de même de $\bigcup_{k,n} kF_n$: aussi, il existe k et n tels que kF_n soit d'intérieur non vide, et alors F_n contient un ouvert non vide U de E. Comme $U \cap X$ est non vide et est contenu dans $F_n \cap X$, on a contredit l'hypothèse, ce qui termine la démonstration.

Bibliographie

[1] J. Dieudonné, **Éléments d'Analyse**, tome 2, Gauthier-Villars.

[2] Denis Choimet et Hervé Queffélec, **Analyse mathématique. Grands théorèmes du vingtième siècle**, Calvage et Mounet.