06 - Fonctions mesurables sur la tribu des singletons

L'univers Ω est muni de la tribu $\mathcal{T}$ engendrée par les événements élémentaires, ou singletons, de Ω.
Un événement, ou une partie, A de Ω appartient à $\mathcal{T}$ si et seulement si A ou son complémentaire $\overline{\mathrm{A}}$ est dénombrable (au plus). Si Ω est dénombrable, $\mathcal{T}=\mathcal{P}(\Omega)$, aussi supposera-t-on *dans toute la suite* Ω infini *non dénombrable*. Une fonction f de Ω dans $\mathbb{R}$ est dite $\mathcal{T}$ - mesurable quand l'image réciproque par f de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est dans la tribu $\mathcal{T}$. Le but de cette note est d'établir l'équivalence entre :

(i) f est $\mathcal{T}$ - mesurable

(ii) Il existe une partie dénombrable D de Ω telle que f soit constante sur $\overline{D}$.

1) On suppose f constante sur $\overline{D}$

Puisque D est dénombrable, il en est de même de $f(\Omega)$: soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite (éventuellement finie) des valeurs *distinctes* prises par f, avec $x_0 = f(\overline{D})$. Pour tout n, $f^{-1}(x_n)$ est dans la tribu : en effet, $f^{-1}(x_0)$ contient $\overline{D}$ et $f^{-1}(x_n)$ est contenu dans D quand $n \geq 1$. Il en résulte que f est $\mathcal{T}$ - mesurable et même au-delà puisque l'image réciproque par f de *toute* partie de $\mathbb{R}$ est dans la tribu.

2) On suppose f mesurable sur $\mathcal{T}$

Pour établir que f est constante sur le complémentaire d'une partie dénombrable D, il faut et il suffit d'établir qu'il existe un réel x tel que $f^{-1}(x)$ soit infini non dénombrable.
La condition est nécessaire, car l'image réciproque du réel $f(\overline{D})$ contient au moins $\overline{D}$.
Elle est suffisante, car $f^{-1}(x)$ appartenant à la tribu, son complémentaire sera alors dénombrable.
On va raisonner par l'absurde, par deux méthodes, *en supposant $f^{-1}(x)$ dénombrable pour tout x* ; chacune des deux méthodes aboutira à des contradictions différentes.

Méthode ensembliste (merci à **Mehdi Tibouchi** et **François Boisson**)

L'égalité $\Omega = \sum_{x\in\mathbb{R}} f^{-1}(x)$ et le caractère non dénombrable de Ω impliquent que l'image $f(\Omega)$ est infinie non dénombrable. Il existe alors un réel x tel que $]-\infty, x[\cap f(\Omega)$ et $[x,+\infty[\cap f(\Omega)$ soient *simultanément* non dénombrables. Admettons provisoirement ce point. Il en résultera que les images réciproques des intervalles $]-\infty, x[$ et $[x,+\infty[$ sont infinies non dénombrables : comme elles sont complémentaires dans Ω, elles ne sont pas dans la tribu des singletons et f n'est donc pas mesurable pour cette tribu.

Montrons maintenant que pour toute partie infinie non dénombrable X de $\mathbb{R}$, il existe un réel x tel que

$$X \cap]-\infty, x[\text{ et } X \cap [x,+\infty[\text{ sont non dénombrables.}$$

Introduisons $R = \{x : X \cap]-\infty, x[\text{ est } \textit{dénombrable}\}$ et $S = \{y : X \cap [y,+\infty[\text{ est } \textit{dénombrable}\}$.

Quand R et S sont vides, $X \cap]-\infty, x[$ et $X \cap [x,+\infty[$ sont non dénombrables pour tout x ; il en est ainsi si X est l'ensemble des irrationnels de $\mathbb{R}$.

Quand R est vide, alors $X\cap]-\infty,x[$ est non dénombrable pour tout x. Reste à trouver x tel que $X\cap[x,+\infty[$ soit aussi non dénombrable. Or X est la réunion dénombrable des $X\cap[-n,+\infty[$ quand n décrit $\mathbb{N}$, il existe donc n tel que $X\cap[-n,+\infty[$ est non dénombrable.

Quand R et S sont non vides, chaque r de R est strictement inférieur à tout s de S, sinon X serait dénombrable car réunion de $X\cap]-\infty,r[$ et de $X\cap[s,+\infty[$. Il en résulte que R est majoré et S minoré. Posons $m=\sup R$ et $M=\inf S$; évidemment, $m\leq M$.

Montrons que m est dans R et M dans S. Soit (r_n) une suite croissante dans R de limite m : alors

$$X\cap]-\infty,m[=\bigcup_n X\cap]-\infty,r_n[$$

et donc $X\cap]-\infty,m[$ est dénombrable, ce qui prouve l'appartenance de m à R. De même, $M\in S$.

On a donc $m<M$, et tout x de $]m,M[$ rend $X\cap]-\infty,x[$ et $X\cap[x,+\infty[$ non dénombrables.

Méthode topologique

Comme $x=\bigcap_{n\geq 1}]x-1/n,x+1/n[$, $f^{-1}(x)$ est l'intersection des $f^{-1}\left(]x-1/n,x+1/n[\right)$. Or la tribu des singletons a la propriété suivante : si un événement *dénombrable* A de cette tribu est l'intersection d'une suite A_n de la tribu, alors il existe n pour lequel A_n est dénombrable (passer aux complémentaires pour le prouver). L'événement $f^{-1}(x)$ ayant été supposé dénombrable, il existe donc n pour lequel $f^{-1}\left(]x-1/n,x+1/n[\right)$ est dénombrable.

Donc, pour chaque réel x, il existe $r(x)>0$ tel que $f^{-1}\left(]x-r(x),x+r(x)[\right)$ soit dénombrable. $\mathbb{R}$ est la réunion dénombrable des compacts $[-n,n]$ et chaque $[-n,n]$ est inclus dans une réunion finie d'intervalles $]x-r(x),x+r(x)[$, aussi $\mathbb{R}$ est-il une réunion dénombrable de $]x_n-r(x_n),x_n+r(x_n)[$. On aurait alors $\Omega=f^{-1}(\mathbb{R})=\bigcup f^{-1}\left(]x_n-r(x_n),x_n+r(x_n)[\right)$ qui serait dénombrable, c'est la contradiction recherchée.