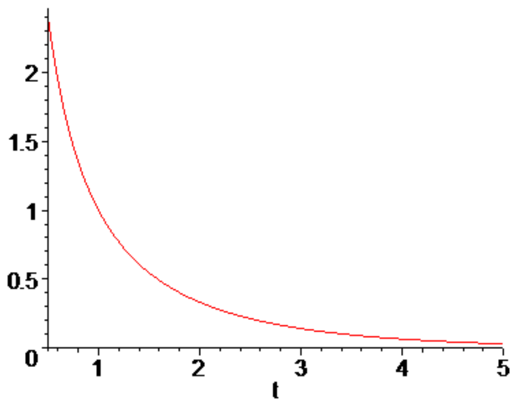
Équivalent de la série double $\sum_{p,q\geq 1} x^{pq}$ en x = 1

Montrons d'abord que pour x réel de l'intervalle]-1,1[la famille x^{pq} est sommable sur $(\mathbb{N}^*)^2$.
Si J est une partie finie de $(\mathbb{N}^*)^2$, il existe K tel que $J\subset\{1,...,k\}^2$ et alors $\sum_J |x|^{pq}\leq \sum_{p=1}^k\sum_{q=1}^k |x|^{pq}$.
Comme $|x|^p<1$, $\sum_{q=1}^k |x|^{pq}\leq \sum_{q=1}^\infty |x|^{pq}=\frac{|x|^p}{1-|x|^p}$ et donc $\sum_J |x|^{pq}\leq \sum_{p=1}^k \frac{|x|^p}{1-|x|^p}$. Or, la série de terme général $\frac{|x|^n}{1-|x|^n}$ converge, il en résulte que les sommes finies $\sum_J |x|^{pq}$ sont majorées. On est donc en droit d'écrire $\sum_{(\mathbb{N}^*)^2} |x|^{pq}=\sum_1^\infty \frac{x^n}{1-x^n}$ pour tout x de]-1,1[. On remarquera que la famille x^{pq} n'est pas sommable sur $\mathbb{N}^2$.

La fonction $S(x)=\sum_{p,q\geq 1} x^{pq}$ étant croissante sur [0,1[, elle admet une limite L, finie ou infinie, en x = 1. Comme $S(x)\geq \sum_{1\leq p,q\leq n} x^{pq}$, $L\geq n^2$ pour tout n et donc $L=+\infty$.[. On se propose de trouver un équivalent de $S(x)$ en $x=1$.

1) Un encadrement de $S(x)$ sur $]0,1[$

Fixons x dans $]0,1[$ et utilisons l'écriture $S(x)=\sum_1^\infty \frac{x^n}{1-x^n}$. Posons $\sum_1^\infty \frac{x^n}{1-x^n}=\sum_1^\infty f(n)$, avec $f(t)=\frac{x^t}{1-x^t}$, fonction continue décroissante et positive sur $]0,+\infty[$:



Il est alors classique que $\int_1^{n+1} f(t)dt\leq \sum_1^n f(k)\leq \frac{x}{1-x}+\int_1^n f(t)dt$. Or,

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt=\left[\frac{\ln(1-x^t)}{-\ln x}\right]_{t=1}^{t=+\infty}=\frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$, d'où $$\frac{\ln(1-x)}{\ln x}\leq \sum_1^\infty \frac{x^n}{1-x^n}\leq \frac{x}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{\ln x}.$$

2) Un équivalent de $S(x)$ quand $x\to 1^-$

Quand x tend vers 1, $\frac{\ln(1-x)}{\ln x}$ est équivalent à $\frac{-\ln(1-x)}{1-x}$ et $\frac{x}{1-x}$ est négligeable devant $\frac{-\ln(1-x)}{1-x}$, donc

$S(x)=\sum_{(\mathbb{N}^*)^2} x^{pq}$ est équivalente à $\ln(1-x)/(x-1)$ en 1^-.