04 - SIX EXERCICES SUR LES SUITES

www.daniel-saada.eu

I - La suite $v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+p}}$ est croissante

a) Pour $x \geq 0$, $1-\frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{16}x^2$. Il suffit de faire deux études de fonctions sur $[0,+\infty[$.

b) Comme $v_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+p/n^2}}$ et $1-\frac{p}{2n^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+p/n^2}} \leq 1-\frac{p}{2n^2}+\frac{3p^2}{16n^4}$, il vient

$$u_n \leq v_n \leq w_n \text{, avec } u_n = 1-\frac{n+1}{4n^2} \text{ et } w_n = 1-\frac{n+1}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{32n^4}$$

ce qui montre que v_n tend vers 1 lentement puisque $1-v_n$ est équivalente à 1/4n.

c) Pour tout $n \geq 1$, $w_n \leq u_{n+1}$

Il s'agit de prouver que $w_n = 1-\frac{n+1}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{32n^4} \leq u_{n+1} = 1-\frac{n+2}{4(n+1)^2}$. Tous calculs faits, on arrive à

$6n^4+17n^3 \geq n^2+5n+1$, ce qui est largement vrai (par une étude de fonction).

d) Comme $v_n \leq w_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1}$, la suite (v_n) est bien croissante.

Une question se pose : déterminer un équivalent de la différence $(v_{n+1}-v_n)$.

II - Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs et soit $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer que l'affirmation suivante est fausse :

$$\exists\, n_0,\ \forall\, n \geq n_0,\ a_{n+1} \leq a_n\left(1+\frac{1-\varepsilon}{n}\right)-1.$$

Supposons qu'elle soit vraie pour un n_0 et fixons un $n \geq n_0$; posons $\lambda = 1-\varepsilon$ et $r_n = 1+\frac{\lambda}{n}$.

Comme a_{n+1} est positif, $a_n \geq 1/r_n$; puisque $a_{n+1} \geq 1/r_{n+1}$, $a_n \geq \frac{1}{r_n}+\frac{1}{r_n.r_{n+1}}$. De proche en proche :

$$a_n \geq \frac{1}{r_n}+\frac{1}{r_n.r_{n+1}}+\ldots+\frac{1}{r_n.r_{n+1}\ldots r_{n+k}} \text{ pour tout entier k positif ou nul.}$$

Lorsque k tend vers l'infini, la somme $\frac{1}{r_n}+\frac{1}{r_n.r_{n+1}}+\ldots+\frac{1}{r_n.r_{n+1}\ldots r_{n+k}}$ tend vers l'infini, voilà pourquoi la suite (a_n) ne peut exister. Justifions maintenant la limite affirmée.

D'abord $\frac{1}{r_n} = \frac{n}{n+\lambda} \geq \frac{n}{n+1}$, ensuite $\frac{1}{r_n.r_{n+1}} \geq \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \frac{n}{n+2}$, puis $\frac{1}{r_n.r_{n+1}\ldots r_{n+k}} \geq \frac{n}{n+k+1}$.

Il en résulte $a_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{n+k} = +\infty$.

III - Les suites $n\sin n$ et $n\cos n$ n'ont pas de limite

• *la suite $n\sin n$ contient une sous-suite bornée*

Soit p_n / q_n la suite des réduites de π : $|\pi - p_n / q_n| < 1/q_n^2$. Comme $|p_n - q_n.\pi| < 1/q_n$ et $|\sin x| \leq |x|$:
$|\sin p_n| = |\sin(p_n - q_n.\pi)| < 1/q_n$ et donc $p_n|\sin p_n| < p_n / q_n \leq p_1 / q_1 = 22/7$.

• *la suite $n\cos n$ contient une sous-suite bornée*

Soit r_n / s_n la suite *infinie* des réduites de $\pi/2$ avec s_n *impairs* : $\left|\frac{\pi}{2} - \frac{r_n}{s_n}\right| < \frac{1}{s_n^2}$ et $s_n = 2k_n + 1$. Alors
$\left|r_n - (2k_n+1)\frac{\pi}{2}\right| < \frac{1}{s_n}$ et $\left|\sin(r_n - (2k_n+1)\frac{\pi}{2})\right| = \left|\sin(r_n - \frac{\pi}{2})\right| = |\cos r_n|$ et donc $|\cos(r_n)| < 1/s_n$ et
$|r_n.\cos(r_n)| < r_n / s_n \leq r_1 / s_1 = 2$.

• *les suites $n\sin n$ et $n\cos n$ contiennent chacune une sous-suite non bornée*

On utilise $(n\sin n)^2 + (n\cos n)^2 = n^2$: $p_n \cos p_n$ n'est donc pas bornée, ainsi que $r_n \sin r_n$.

IV - La suite positive $n(1+\sin n)$ a-t-elle une limite ?

• *$n(1+\sin n)$ contient une sous-suite de limite infinie*

Soit $\left|\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$ avec p_n et q_n entiers positifs tendant vers $+\infty$. On a

$$|\sin p_n| = |\sin(p_n - \pi q_n)| \leq 1/q_n \text{ et } \frac{p_n}{q_n} \leq \pi + \frac{1}{q_n^2} \leq 5$$

donc $|\sin p_n| \leq 5/p_n$ et $p_n|\sin p_n| \leq 5$ et enfin $p_n + p_n \sin p_n \geq p_n - 5 \to +\infty$.

Par **densité** : $\sin(n)$ est dense dans $[-1,1]$, donc 0 est valeur d'adhérence et à partir d'un certain rang $\sin n \geq -0{,}1$, donc $n(1+\sin n) \geq 0{,}9n \to +\infty$, résultat toutefois en retrait sur le précédent.

• *$n(1+\sin n)$ contient une sous-suite de limite nulle ?*

On **admet** qu'il existe une sous-suite $\frac{r_n}{s_n}$ de réduites de $3\frac{\pi}{2}$ telle que $s_n = 4k_n + 1$: $\left|3\frac{\pi}{2} - \frac{r_n}{s_n}\right| \leq \frac{1}{s_n^2}$.

On a $\left|r_n - s_n\frac{3\pi}{2}\right| \leq \frac{1}{s_n}$ et $r_n - s_n\frac{\pi}{2} = r_n - \frac{3\pi}{2} - (6k_n)\pi = r_n + \frac{\pi}{2} - (2+6k_n)\pi$**, d'où**
$1 + \sin r_n = 1 - \cos(r_n + \pi/2) = 2\sin^2(r_n/2 + \pi/4)$**.**

Or $|\sin(r_n/2 + \pi/4)| = |\sin(r_n/2 - (4k_n+1)3\pi/4)| \leq 1/2s_n$
d'où $1 + \sin r_n = 2\sin^2(r_n/2 + \pi/4) \leq 1/2s_n^2$
et $r_n(1+\sin r_n) \leq r_n / 2s_n^2 \to 0$ car r_n / s_n tend vers $3\pi/2$.

V- SUR LE THÉORÈME DE CESARO (Alain Rémondière et Emmanuel Cabanillas)

Soit :

$B = l^\infty(\mathbb{N})$, le Banach des suites réelles ou complexes bornées $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, normé par $\|x\| = \sup_n |x_n|$;

T l'opérateur continu de B dans B défini par $T(x)=y$ où $y_n=\frac{1}{n+1}\sum_0^n x_k$;

C le sous-espace de B formé des suites convergentes ;

$C_1=\{x\in B : T(x)\in C\}=T^{-1}(C)$;

$C_2=\{x\in B : T(x)\in C_1\}=\{x\in B : T^2(x)\in C\}$.

Le théorème de Cesaro assure que $C\subset C_1\subset C_2$: **nous allons prouver que** $C_1=C_2$.

Soit u dans C_2. On pose $v=T(u)$ et $w=T(v)=T^2(u)$: $v_n=\frac{1}{n+1}\sum_0^n u_k$, $w_n=\frac{1}{n+1}\sum_0^n v_k$, w_n converge.

Alors $v_n=(n+1)w_n-nw_{n-1}$ et $u_n=(n+1)v_n-nv_{n-1}$: les suites $n(v_n-v_{n-1})=u_n-v_n$ et $n(w_n-w_{n-1})=v_n-w_n$ sont bornées, car (u_n), (v_n), (w_n) le sont.

Posons $\varepsilon_n=n(w_n-w_{n-1})=v_n-w_n$: comme $n(\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1})=n(v_n-v_{n-1})-n(w_n-w_{n-1})$,

$\boxed{n(\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}) \text{ est bornée.}}$

Puisque u est dans C_2, la suite (w_n) converge, la série $\sum_n(w_n-w_{n-1})$ converge et donc $\boxed{\sum_{n\ge1}\frac{\varepsilon_n}{n} \text{ converge}}$.

Montrons à présent que $\boxed{\varepsilon_n\to 0}$. En séparant les parties réelle et imaginaire de ε_n, on peut supposer ε_n réelle.

On va raisonner par l'absurde en supposant que ε_n ne tend pas vers 0 et on va en déduire que la série $\sum_{n\ge1}\frac{\varepsilon_n}{n}$ diverge. Quitte à changer ε_n en $-\varepsilon_n$, il existe donc un réel $B>0$ tel que $\varepsilon_n\ge B$ pour une infinité d'indices n, notée I. Soit $A>0$ tel que $|\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}|\le A/n$ (si $A=0$, il n'y a rien à démontrer) et posons $C=e^{B/2A}-1, C>0$.

On vérifie que $p\le n.C$ implique $B-A(\ln(n+p)-\ln n)\ge B/2>0$ (on suppose n suffisamment grand).

D'autre part, si $1\le p\le n.C$, alors $|\varepsilon_{n+p}-\varepsilon_n|\le A\sum_{n+1}^{n+p}1/k\le A(\ln(n+p)-\ln n)$, d'où l'on déduit $\varepsilon_{n+p}\ge\varepsilon_n-A(\ln(n+p)-\ln n)$. Si $n\in I$, on a $\varepsilon_{n+p}\ge B-A(\ln(n+p)-\ln n)\ge B/2$ quand $p\le n.C$.

Donc, si $n\in I$, $\sum_{p=0}^{n.C}\frac{\varepsilon_{n+p}}{n+p}\ge\frac{B}{2}\sum_{p=0}^{n.C}\frac{1}{n+p}\ge\frac{B}{2}(\ln(n+n.C+1)-\ln n)\ge\frac{B}{2}\ln(C+1)$.

Il en résulte qu'en posant $S_n=\sum_1^n\frac{\varepsilon_k}{k}$, $S_{n+n.C}-S_{n-1}\ge\frac{B}{2}\ln(C+1)>0$ pour $n\in I$; comme I est infini, la suite S_n n'est pas de Cauchy et donc diverge.

Comme $v_n=\varepsilon_n+w_n$, v_n converge et a la même limite que w_n. Ainsi, $v\in C$ et $u\in C_1$.

VI- La suite des fonctions $f_n(x)=\prod_{k=0}^n\sin(10^k x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

a) La suite f_n converge simplement vers 0

L'inégalité évidente $|f_{n+1}(x)|\le|f_n(x)|$ montre déjà que $|f_n|$ converge sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Si $f(x)\ne0$ pour un certain réel x, alors $|\sin(10^{n+1}x)|=\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}$ tendrait vers 1 quand n tend vers l'infini. Nous allons montrer que, pour x fixé, la suite $n\to|\sin(10^{n+1}x)|$ ne tend jamais vers 1.

S'il en était ainsi, $10^n x$ pourrait s'écrire $(2k_n+1)\pi/2+\varepsilon_n$, avec k_n entiers et $\varepsilon_n \to 0$.
Comme $10^{n+1}x=(2k_{n+1}+1)\pi/2+\varepsilon_{n+1}$, on aurait $k_{n+1}-10k_n \to 9/2$, ce qui est absurde (Alain Rémondière).

b) La convergence de f_n vers 0 est uniforme sur $\mathbb{R}$

Chaque fonction $|f_n|$ étant de période π, il suffit d'établir que la convergence est uniforme sur l'intervalle compact $[0,\pi]$. Cela résulte d'un théorème de Dini :

La convergence simple d'une suite monotone de fonctions définies et continues sur un espace compact vers une fonction continue implique sa convergence uniforme.