03 - UNIFICATION DES ESPACES VECTORIELS USUELS ET UN THÉORÈME

1) Les espaces vectoriels usuels

Les espaces vectoriels (réels) que nous manipulons sont :

- les espaces $\mathbb{R}^n$, ensembles des n-uplets ;
- les espaces $\mathbb{R}_n[x]$, ensembles des polynômes de degré au plus n ;
- l'espace $\mathbb{R}[x]$, ensemble de tous les polynômes ;
- l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites réelles ;
- l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans cette liste, les seules inclusions véritables sont $\mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}[x]$ ($\mathbb{R}[x]$ valant d'ailleurs $\bigcup_0^\infty \mathbb{R}_n[x]$) et $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car un polynôme est une fonction particulière. Toutefois, comme $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{R}_{n-1}[x]$) est assimilable à l'ensemble des suites nulles à partir du rang n+1 et $\mathbb{R}[x]$ au sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang, il n'est pas abusif d'écrire $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: première unification, dans le langage des suites.

Un vecteur $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ se notant aussi $(a(1), a(2), ..., a(n))$, $\mathbb{R}^n$ est donc l'espace vectoriel des applications de $\{1, 2, ..., n\}$ dans $\mathbb{R}$. Plus généralement, si I désigne une partie de cardinal n de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ se confond avec $\mathbb{R}^I$, ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ étant l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:
$\mathbb{R}^I, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, c'est la deuxième unification, en termes de fonctions.

2) Formes linéaires et dual

Une forme linéaire sur un espace vectoriel réel E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Le dual de E , noté E' , est l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur E . Quand E est de dimension finie, E' a la même dimension que E .

Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, ou sur un espace vectoriel E de dimension finie n, sont faciles à déterminer. Soient $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E et φ une forme linéaire sur E . Quand $x = \sum_1^n x_i e_i$ alors $\varphi(x) = \sum_1^n x_i \varphi(e_i)$; en posant $a_i = \varphi(e_i)$, $\varphi(x) = \sum_1^n x_i \varphi(e_i) = \sum_1^n a_i x_i$: φ est donc combinaison linéaire des n formes $x \to x_i$. On vérifie sans peine que les n formes $x \to x_i$ forment une base du dual E' de E .

Sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ou plus généralement sur un espace $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}$ de fonctions (A est un ensemble quelconque), il y a des formes linéaires naturelles, à savoir $f \to f(x)$, x décrivant A : elles sont consubstantielles à $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}$, car une fonction f de A dans $\mathbb{R}$ peut se noter $(f(x))_{x \in \mathrm{A}}$ ou $(f_x)_{x \in \mathrm{A}}$.

3) Un Théorème

Si V est un sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

il existe une partie finie I de $\mathbb{R}$ telle que V soit isomorphe à $\mathbb{R}^I$.

DÉMONSTRATION

a) On détermine une base du dual de V

On va prouver, par récurrence sur la dimension n de V, qu'il existe n réels distincts x_i tels que le dual de V ait pour base les n formes linéaires $f \to f(x_i)$.

Pour n = 1, c'est un jeu d'écriture. Soit f_1 une base de V : f_1 n'étant pas nulle, il existe un réel x_1 tel que $f_1(x_1) \neq 0$. Soient f une fonction de V et φ une forme linéaire sur V : il existe un réel k tel que $f = kf_1$, d'où $\varphi(f) = k\varphi(f_1)$. Si on pose $\lambda = \dfrac{\varphi(f_1)}{f_1(x_1)}$, $\varphi(f) = k\lambda f_1(x_1) = \lambda k\, f_1(x_1) = \lambda f(x_1)$: φ est donc bien proportionnelle à la forme $f \to f(x_1)$ (λ ne dépend pas de f).

Supposons la propriété vraie au rang n, supposons $\dim V = n+1$ et soit $(f_1,...,f_n,f_{n+1})$ une base de V.
Comme f_{n+1} n'est pas nulle, il existe un réel x_{n+1} tel que $f_{n+1}(x_{n+1}) \neq 0$ et donc la forme linéaire $f \to f(x_{n+1})$ n'est pas nulle sur V : il en résulte que son noyau $W = \{f \in V : f(x_{n+1}) = 0\}$ est un hyperplan de V, c'est-à-dire un sous-espace de dimension n.

Soit φ une forme linéaire sur V : φ est aussi une forme linéaire sur W, et donc, par hypothèse de récurrence il existe n réels distincts $x_1,...,x_n$ tels que $\varphi(f) = \sum_1^n \lambda_i f(x_i)$ pour toute f de W, les λ_i <u>ne dépendant que de</u> φ.
Soit f dans V : comme la combinaison linéaire $f - \dfrac{f(x_{n+1})}{f_{n+1}(x_{n+1})} f_{n+1}$ est dans W,

$$\varphi\left(f - \frac{f(x_{n+1})}{f_{n+1}(x_{n+1})} f_{n+1} \right) = \sum_1^n \lambda_i \left(f - \frac{f(x_{n+1})}{f_{n+1}(x_{n+1})} f_{n+1} \right)(x_i)$$

et donc $\varphi(f) = \sum_1^{n+1} \lambda_i f(x_i)$, avec $\lambda_{n+1} = \dfrac{\varphi(f_{n+1}) - \sum_1^n \lambda_i f_{n+1}(x_i)}{f_{n+1}(x_{n+1})}$.

Comme λ_{n+1} ne dépend pas de f, la démonstration de **a)** est achevée.

b) On prouve que V est isomorphe à $\mathbb{R}^I$

Pour tout réel x, $f \to f(x)$ est une forme linéaire sur V. Cette forme est donc combinaison linéaire des vecteurs $f \to f(x_i)$ de la base : il existe n réels <u>dépendants de x</u> $\lambda_1(x),...,\lambda_n(x)$ tels que $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) f(x_i)$.
Toute fonction f de V est donc combinaison linéaire des n *fonctions* λ_i : $f = \sum_{i=1}^n f(x_i)\lambda_i$, et donc

$$V \subset Vect(\lambda_1,...,\lambda_n).$$

Comme V est de dimension n, il en résulte que $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ est un système libre, puis que $V = Vect(\lambda_1,...,\lambda_n)$, et enfin que les n fonctions λ_i sont dans V et en forment une base : la démonstration est complète.

Remarque : si $V = \mathbb{R}_{n-1}[x]$, toute famille (x_i) de n réels distincts convient car l'application
$P \to (P(x_1), P(x_2),...,P(x_n))$ est dans ce cas un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ sur $\mathbb{R}^n$.

Une application : *un critère de liberté pour des fonctions numériques.*

Puisque $f \to (f(x_1),...,f(x_n))$ est un isomorphisme entre V et $\mathbb{R}^n$, n fonctions $f_1,...,f_n$ formeront un système libre si et seulement si le déterminant des $f_i(x_j)$ est non nul, résultat classique.