Un algorithme qui génère les k^n résultats quand on lance n dés à k faces

L'ensemble des résultats est l'univers $\Omega = \{1, 2, ..., k\}^n$; un événement élémentaire est un n-uplet $(d(1), d(2), ..., d(n))$. Le programme qui suit affiche sans redondance tous les éléments de Ω :

10 pour i allant de 1 à n : d(i) ← 1

20 afficher d(1), d(2),…,d(n)

30 $i \leftarrow n$

40 d(i) ← 1 + d(i)

50 si $d(i) \leq k$ aller en **20**

60 d(i) ← 1 et i ← i – 1

70 si i > 0 aller en **40**

80 FIN.

Pour contrôler cet algorithme, insérons un compteur C qui, à la fin du programme, doit afficher le cardinal de Ω :

5 $C \leftarrow 0$

10 pour i allant de 1 à n : d(i) ← 1

20 $C \leftarrow C + 1$

30 $i \leftarrow n$

40 d(i) ← 1 + d(i)

50 si $d(i) \leq k$ aller en **20**

60 d(i) ← 1 et i ← i – 1

70 si i > 0 aller en **40**

80 afficher C.

Pour n = 5 et k = 6 (5 dés à 6 faces), on a bien C = 7776 = 6^5.
Évidemment, on est tenu de se limiter aux petites valeurs de n et k.
Dans la suite, on conserve n = 5 et k = 6.
Comme deuxième vérification et application de cet algorithme, on va déterminer la distribution de la somme $S = d(1) + d(2) + ... + d(5)$, somme qui varie de 5 à 30.
Le programme qui suit, *non optimisé*, calcule et affiche les 26 valeurs de S :

5 pour j allant de 5 à 30 : S(j) = 0

10 pour i allant de 1 à n : d(i) $\leftarrow$ 1

20 j=d(1) +…+ d(5) et S(j) $\leftarrow$ 1+ S(j)

30 $i \leftarrow n$

40 d(i) $\leftarrow$ 1 + d(i)

50 si $d(i) \le k$ aller en **20**

60 d(i) $\leftarrow$ 1 et i $\leftarrow$ i – 1

70 si i > 0 aller en **40**

80 pour j allant de 5 à 30 : afficher S(j).

Après exécution, on lit :

1, 5, 15, 35, 70, 126, 205, 305, 420, 540, 651, 735, 780,
780, 735, 651, 540, 420, 305, 205, 126, 70, 35, 15, 5, 1

résultats conformes à la formule théorique $S(j) = \sum_{i=0}^{j/6} (-1)^i \binom{5}{i} \binom{4+j-6i}{4}$.

En effet, si $X_1,\ldots,X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et *uniformes* sur $\{1,2,\ldots,k\}$, la distribution de leur somme $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ est donnée par

$$p(S_n = n+t) = \frac{1}{k^n} \sum_{i=0}^{t/k} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n-1+t-i.k}{n-1}$$

l'entier t variant de 0 à $(k-1)n$.

Curieusement, la fonction de répartition de S_n n'est pas plus compliquée que sa loi :

$$k^n.p(S_n \le n+T) = \sum_{t=0}^{T} \sum_{i=0}^{t/k} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n-1+t-i.k}{n-1} = \sum_{i=0}^{T/k} (-1)^i \binom{n}{i} \sum_{t=ik}^{T} \binom{n-1+t-i.k}{n-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{T/k} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+T-ik}{n}$$

en vertu de la formule bien connue $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \ldots + \binom{p+u}{p} = \binom{p+u+1}{p+1}$.