La loi de la réflexion sur un quart de cercle

Le point $M(\cos\theta, \sin\theta)$ décrit le quart de cercle de rayon 1 et de centre O du premier quadrant, A est le point d'abscisse a sur l'axe des x, B le point d'ordonnée b sur l'axe des y. On sait qu'un rayon lumineux issu de A, se réfléchissant en M sur le quart de cercle, et arrivant en B emprunte un chemin de longueur extrémale : c'est le principe de Fermat. Le but de cette note est donc d'étudier les extremums de la fonction $h(\theta) = MA + MB = \sqrt{a^2+1-2a\cos\theta} + \sqrt{b^2+1-2b\sin\theta}$, θ décrivant $[0, \pi/2]$ et $0 < a, b < 1$.

1) $h'(\theta) = \dfrac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2+1-2a\cos\theta}} - \dfrac{b\cos\theta}{\sqrt{b^2+1-2b\sin\theta}}$: comme h' prend des valeurs de signe contraire en 0 et $\pi/2$, h' s'annule au moins une fois sur $]0, \pi/2[$; $h'(\theta) = 0$ veut dire que MO est la bissectrice intérieure de AMB, la tangente en M étant la bissectrice extérieure.

2) $h'(\theta)$ est du signe de $P(\theta) = (a\sin\theta)^2(b^2+1-2b\sin\theta) - (b\cos\theta)^2(a^2+1-2a\cos\theta)$ qui s'écrit

$$\mathrm{P}(\theta) = a^2b^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta - 2ab(a\sin^3\theta - b\cos^3\theta).$$

La dérivée $P'(\theta) = \left[2a^2b^2 + a^2 + b^2 - 3ab(a\sin\theta + b\cos\theta)\right]\sin(2\theta)$ est du signe de $U(\theta) = 2a^2b^2 + a^2 + b^2 - 3ab(a\sin\theta + b\cos\theta)$, dont la dérivée est $U'(\theta) = 3ab(b\sin\theta - a\cos\theta)$.

Il en résulte que *U* est minimale en θ_0 de tangente a/b :

θ	0	θ_0 $\pi/2$
U'	–	+
U	↘	↗

Quand $U'(\theta) = 3ab(b\sin\theta - a\cos\theta) = 0$, $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}$ et le minimum de *U* est

$$m = 2a^2b^2 + a^2 + b^2 - 3ab\sqrt{a^2+b^2} = (\sqrt{a^2+b^2} - 2ab)(\sqrt{a^2+b^2} - ab).$$

Comme $\sqrt{a^2+b^2} - ab \geq 0$, m est du signe de $a^2+b^2-4a^2b^2$. Il y a alors deux cas :

■ si $a^2+b^2-4a^2b^2 \geq 0$, alors $P' \geq 0$ et P croît sur $[0, \pi/2]$:

θ	0 $\pi/2$
P	$P(0)<0$ ↗ $P(\pi/2)>0$

Comme h' est du signe de P, h est minimale en un seul point de $]0, \pi/2[$.

■ si $a^2+b^2 < 4a^2b^2$, on vérifie d'abord que

$P'(0) = 2a^2b^2 + a^2 + b^2 - 3ab^2$ et $P'(\pi/2) = 2a^2b^2 + a^2 + b^2 - 3a^2b$ sont > 0, car ce sont des trinômes en *a* de discriminant négatif. Comme m < 0, P' s'annule deux fois :

	0 $\quad\theta_1\quad$ θ_2 $\quad\pi/2$		
P'	+	–	+
P	$P(0)<0$ ↗	↘	↗ $P(\pi/2)>0$

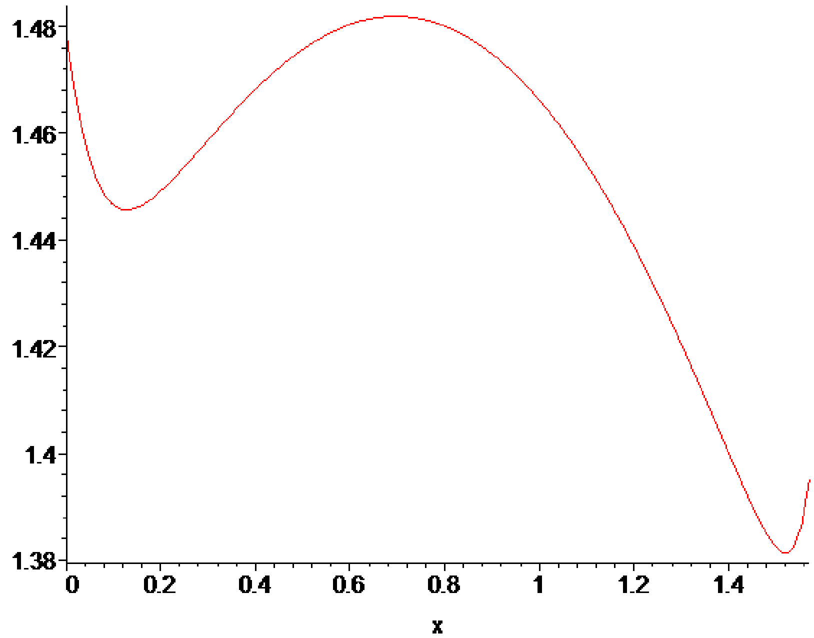
Si $P(\theta_1)$ et $P(\theta_2)$ sont de même signe, P a un seul zéro et h aura un seul minimum.

Si $P(\theta_1)>0$ et $P(\theta_2)<0$, P a trois zéros :

θ	0 $\qquad\pi/2$			
P	-	+	-	+
h	↘	↗	↘	↗

C'est le cas quand a = 0,9 et b = 0,95 si on se fie au graphe de *h* tracé par Maple :

```
> plot(sqrt(1.81-1.8*cos(x))+sqrt(1+.95^2-1.9*sin(x)),x=0..Pi/2);
```



3) Factorisation de $\mathrm{P}(\theta)=a^2b^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+a^2\sin^2\theta-b^2\cos^2\theta-2ab(a\sin^3\theta-b\cos^3\theta)$

Comme

$$a^2b^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=-a^2b^2\cos 2\theta$$

$$a^2\sin^2\theta-b^2\cos^2\theta=(a\sin\theta-b\cos\theta)(a\sin\theta+b\cos\theta)$$

$$\begin{aligned} a\sin^3\theta-b\cos^3\theta &= a\sin\theta(1-\cos^2\theta)-b\cos^3\theta = a\sin\theta-\cos^2(a\sin\theta+b\cos\theta) \\ &= a\sin^3\theta-b\cos\theta(1-\sin^2\theta)=-b\cos\theta+\sin^2\theta(a\sin\theta+b\cos\theta) \\ &= -\frac{1}{2}(a\sin\theta+b\cos\theta)\cos 2\theta+\frac{1}{2}(a\sin\theta-b\cos\theta), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} P(\theta) &= ab\cos 2\theta(a\sin\theta+b\cos\theta-ab)+(a\sin\theta-b\cos\theta)(a\sin\theta+b\cos\theta-ab) \\ &= (a\sin\theta+b\cos\theta-ab)(ab\cos 2\theta+a\sin\theta-b\cos\theta). \end{aligned}$$

La fonction $a\sin\theta + b\cos\theta - ab$ étant strictement positive sur $[0,\pi/2]$, il en résulte que $P(\theta)$ est du signe de $ab\cos 2\theta + a\sin\theta - b\cos\theta$.

5) Étude de $V(\theta) = ab\cos 2\theta + a\sin\theta - b\cos\theta$

$V'(\theta) = -2ab\sin 2\theta + a\cos\theta + b\sin\theta$ est du signe de $W(\theta) = \dfrac{a}{\sin\theta} + \dfrac{b}{\cos\theta} - 4ab$.

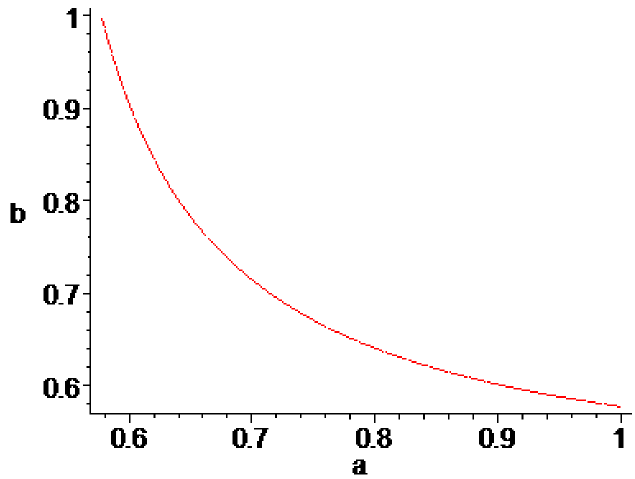
Le minimum de *W* sur $[0,\pi/2]$ est $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} - 4ab$; quand $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} - 4ab \geq 0$:

θ	0 $\quad\quad$ $\pi/2$
V	$b(a-1) \nearrow a(1-b)$

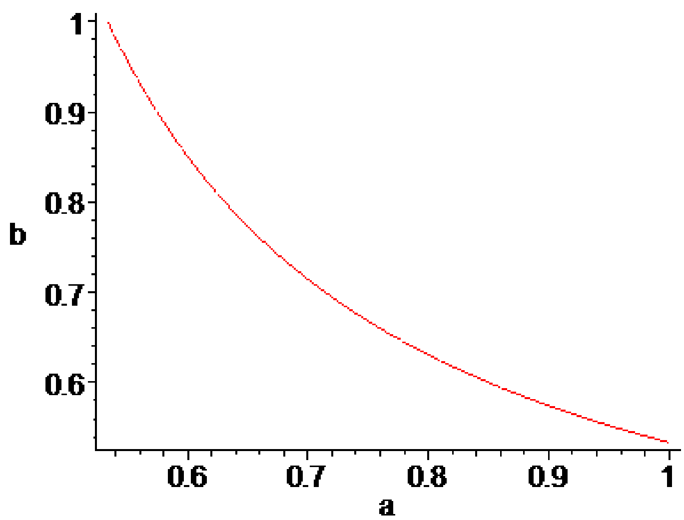
P s'annule encore une seule fois.

Comparaison des conditions $a^2 + b^2 - 4a^2b^2 \geq 0$ et $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} - 4ab \geq 0$, avec Maple :

```
>plots[implicitplot](a^2+b^2=4*a^2*b^2,a=0..1,b=0..1);
```




```
>plots[implicitplot]((a^(2/3)+b^(2/3))^1.5=4*a*b,a=0..1,b=0..1);
```



La deuxième condition semble meilleure.