TOUT FERMÉ D'UN ESPACE MÉTRIQUE EST-IL UNE PARTIE FRONTIÈRE ?

www.daniel-saada.eu

Roger Cuculière, Hubert Quatreville, Alain Rémondière, Clément de Seguins Pazzis

Dans toute la suite, E désigne un ensemble muni d'une distance d ; la frontière d'une partie A de E est notée $Fr(A)$: $Fr(A)=\overline{A}-\overset{0}{A}$. Si une frontière est fermée, son intérieur n'est pas toujours vide : par exemple, $Fr(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$ .Tout fermé d'intérieur vide est la frontière de lui-même, mais qu'en est-il pour les fermés d'intérieur non vide ? S'il est facile de vérifier que $[0,1]$ est la frontière de $[0,1]\cap\mathbb{Q}$, un fermé quelconque de $\mathbb{R}$ est-il une partie frontière ? Nous nous proposons de répondre à cette question.

Un point a de E est dit *isolé* s'il existe un réel $r>0$ tel que $B(a,r)\cap E=\{a\}$: le fermé $\{a\}$ est donc ouvert et $E-\{a\}$ n'est pas dense dans E. Si E est sans point isolé, alors $\forall a\in E\ \ \forall r>0\ \ \exists b\in E\ \ d(a,b)<r$, et *toute partie dense D de E est sans point isolé vis-à-vis d'elle-même*. En effet, si $d\in D$, la boule ouverte $B(d,r)$ contient un a de E puisque E est sans point isolé et il existe $\rho>0$ tel que $B(a,\rho)\subset B(d,r)$, mais comme D est dense , il existe $\delta\in D\cap B(a,\rho)$.

Par application du *théorème de Zorn*, pour tout $\varepsilon>0$ assez petit, il existe un sous-ensemble A de E *maximal pour l'inclusion* tel que $d(x,y)>\varepsilon$ pour tous x et y distincts dans A. Autrement dit, si $x\in E-A$, il existe $a\in A$ tel que $d(x,a)\le\varepsilon$. Si $B\subset A$, B est fermée et *si E est sans point isolé, l'ouvert $E-B$ est dense dans E*.

Le but de cette note est d'établir l'équivalence entre

1) E est sans point isolé

2) il existe dans E une partie dense d'intérieur vide

3) tout fermé de E est la frontière d'une partie de E.

1) implique 2)

On va construire dans E deux parties denses X et Y disjointes : ces deux parties seront d'intérieur vide.

Pour ce faire, on définit par récurrence trois suites de parties de E, (E_n), (X_n) et (Y_n), telles que

E_n est dense dans E,

$X_n\subset E_n, Y_n\subset E_n, X_n\cap Y_n=\varnothing$.

- On pose $E_1=E$ et X_1 désigne une partie maximale de E_1 telle que $d(x,y)>1$ pour x et y distincts dans X_1.

  Pour tout x de X_1, on choisit un y de E_1 tel que $0<d(x,y)<1/4$: un tel y existe car x est non isolé dans E_1 ; on note Y_1 l'ensemble des y ainsi choisis. Il est clair que

  $X_1\cap Y_1=\varnothing$, y et z distincts dans Y_1 implique $d(y,z)>1/2$.

De plus $E_1-(X_1+Y_1)$ est[1] dense dans $E_1=E$ car E est sans point isolé et X_1+Y_1 est un ensemble de points dont les distances mutuelles sont $\geq \alpha$, avec $\alpha>0$.

- Pour $n\geq 2$, on pose $E_n=E_{n-1}-(X_{n-1}+Y_{n-1})$, puis X_n désigne une partie maximale de E_n telle que $d(x,y)>1/n$ pour x et y distincts dans X_n . Pour tout x de X_n , on choisit un y de E_n tel que $0<d(x,y)<1/4n$: un tel y existe car x est non isolé dans *la partie dense* E_n . On note Y_n l'ensemble des y ainsi choisis. Il est clair que $X_n\cap Y_n=\varnothing$, y et z distincts dans Y_n impliquant $d(y,z)>1/2n$.
- E_n dense dans E entraîne $E_{n+1}=E_n-(X_n+Y_n)$ dense dans E . En effet, X_n+Y_n est un ensemble de points dont les distances mutuelles sont $\geq \alpha$, avec $\alpha>0$ et donc E_{n+1} est dense dans E_n ; comme E_n est dense dans E , alors E_{n+1} est dense dans E .

On définit maintenant X et Y par $X=\bigcup_n X_n$ et $Y=\bigcup_n Y_n$ et on prouve leur densité :

- pour tout x de E_n , $d(x,X_n)\leq 1/n$ et $d(x,Y_n)\leq 1/n+1/4n$; par densité de E_n dans E , ces deux inégalités sont vraies dans E et alors $d(x,X)=d(x,Y)=0$ pour tout x de E .
- X et Y sont disjoints (et on a même $X+Y=E_1=E$). Prouvons que $X_p\cap Y_q=\varnothing$ pour tout p et q : si $p=q$, c'est l'évidence ; si $p<q$ par exemple, alors $Y_q\subset E_q\subset E_p$ tandis que $X_p\subset E_p-E_q$.

Enfin, les parties denses disjointes X et Y ne peuvent pas contenir d'ouvert non vide, sinon ceux-ci ne sauraient rencontrer à la fois X et Y .

2) implique 3)

Soit F un fermé de E et D une partie dense d'intérieur vide.

Il s'agit de trouver une partie G telle que $F=Fr(G)$. Nous allons construire G telle que $F=\overline{G}$ et $\overset{0}{G}=\varnothing$.

Pour être assuré que $\overset{0}{G}=\varnothing$, nous prendrons $G\subset D$. Reste à exhiber un sous-ensemble de D dont l'adhérence est F . Dans D existe, pour tout n , une partie maximale D_n telle que $d(x,y)\geq 1/n$ pour x et y distincts dans D_n .

Posons $G_n=\{x\in D_n : d(x,F)\leq 2/n\}$ et $G=\bigcup_n G_n$: $\overset{0}{G}=\varnothing$ car G est inclus dans D . Reste à montrer que $F=\overline{G}$, nous le faisons par double inclusion :

Montrons d'abord $F\subset\overline{G}$. Soit $f\in F$ et $\varepsilon>0$, puis fixons un entier $n>2/\varepsilon$. Il existe par densité $d\in D$ tel que $d(f,d)<1/n$; comme D_n est une partie maximale, il existe $d_n\in D_n$ tel que $d(d_n,d)<1/n$ et il en résulte alors que $d(f,d_n)<2/n<\varepsilon$. On a donc $d_n\in B(f,\varepsilon)\cap G_n$, aussi la boule $B(f,\varepsilon)$ rencontre-t-elle G .

[1] A+B désigne la réunion de A et de B quand A et B sont disjoints

Prouvons maintenant $\overline{G} \subset F$. Soit $u \notin F$ et posons $a = d(u, F)$, $a > 0$. Pour $n > 4/a$, $B(u, a/4) \cap G_n = \varnothing$, car si $x \in G_n$ et $f \in F$ tel que $d(x, f) \leq 3/n$, $d(u, x) \geq d(u, f) - d(x, f) \geq a - 3/n \geq a/4$.

Lorsque $n \leq 4/a$, la boule $B(u, a/8)$ ne rencontre D_n qu'en un seul point x au plus, sinon on aurait $1/n \leq d(x, x') < a/4$ et donc $n > 4/a$. Il en résulte que $B(u, a/8) \cap G$ est de cardinal fini :

u n'est pas adhérent à G .

3) implique 1)

Par contraposée : si a de E est isolé, $\{a\}$ est un fermé qui n'est pas une frontière. En effet, $\{a\}$ est à la fois ouvert et fermé ; s'il existait G telle que $Fr(G) = \overline{G} - \overset{0}{G} = \{a\}$, on aurait $a \in \overline{G}$ et donc a dans G (raisonner par l'absurde), puis $a \in \overset{0}{G}$ ce qui est impossible.