NOTE 25 - Sur tout espace métrique compact non dénombrable existe une mesure diffuse positive non nulle

www.daniel-saada.eu

Soit (K,d) un espace métrique compact : existe-t-il sur la tribu des boréliens de K une mesure positive diffuse non nulle, c.à.d. ne chargeant aucun point de K ? Si K est fini ou dénombrable, c'est évidemment impossible. Si K a la puissance du continu la réponse est oui, comme en témoignent les deux exemples suivants, de construction difficile : la mesure de Borel sur les compacts de R **[2, p. 98]**, la mesure du jeu infini de pile ou face sur $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ **[2, chap. 15]**.

Auparavant, il nous faut faire un détour par les compacts sans point isolé qu'on appelle compacts parfaits.

A- Construction d'une mesure diffuse sur un métrique compact parfait (Denis Trotabas)

1) Rappels d'analyse fonctionnelle

Comme K est compact, l'espace vectoriel $\mathcal{C}(K)$ des fonctions numériques continues f sur K est normé par $\| f \| = \max_K | f(x) |$ (toute fonction numérique continue sur un compact est bornée).

Muni de cette norme, $\mathcal{C}(K)$ est un espace de Banach : de ce fait, les boules fermées du dual fort de K sont compactes pour la topologie faible (une suite L_n de formes linéaires continues tend vers L signifiant que $L_n(x)$ tend vers $L(x)$ pour tout x de K).

De plus, K étant séparable car métrique compact, les boules fermées du dual sont séquentiellement compactes car la topologie faible est métrisable ; en conséquence, si une suite (L_n) est bornée en norme, elle contient une sous-suite faiblement convergente.

Si besoin, consulter http://www.cmi.univ-mrs.fr/~wielonsk/resultat_cours.pdf .

2) Le théorème de représentation de Riesz pour les espaces topologiques compacts [1]

a) Si L est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(K)$, il existe une (unique) mesure positive µ sur les boréliens de K telle que $L(f) = \int_K f\, d\mu$ pour toute $f \in \mathcal{C}(K)$.

b) Pour tout $x \in K$, $\mu(x)$ est la borne inférieure des intégrales $\int_K f\, d\mu$ quand :

$$f \text{ est continue sur } K,\ 0 \le f \le 1,\ f(x) = 1.$$

3) Le lemme d'Urysohn dans les espaces métriques

Soit F et G deux fermés *disjoints* d'un espace métrique (E,δ) : il existe une fonction numérique f continue sur E telle que $f = 1$ sur F, $f = 0$ sur G, $0 \le f \le 1$.

En effet, la fonction $f(x) = \dfrac{\delta(x,G)}{\delta(x,F) + \delta(x,G)}$ convient.

En particulier, pour tout $x\in E$ et tout réel $r>0$, il existe une fonction continue f sur E, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $f(x)=1$ et $f=0$ sur $E-B(x,r)$: nous la noterons $f(x,r)$.

4) Une suite de mesures finies sur K qui converge vaguement

Soit B_0 la boule ouverte de rayon 1 et de centre x_0 quelconque dans K ; comme x_0 n'est pas isolé, on peut trouver dans B_0 deux boules *disjointes* de centre $x_{1,1}$ et $x_{1,2}$.

Supposons qu'on dispose de 2^{n-1} boules ouvertes disjointes : chacune de ces boules contenant deux boules disjointes, on fabrique ainsi par récurrence sur n une suite de 2^n boules ouvertes disjointes $B_{n,1},\dots,B_{n,2^n}$ de centre $x_{n,1},\dots,x_{n,2^n}$.

Soit M_n la mesure uniforme portée par l'ensemble F_n des 2^n centres et L_n l'intégrale issue de M_n : $L_n(f)=\int_K f\,dM_n=\dfrac{1}{cardF_n}\sum_{x\in F_n}f(x)$. En particulier, $L_n(1)=1$.

Chaque L_n est de norme ≤ 1, donc il existe une sous-suite L_{n_i} qui converge vers une forme linéaire continue L. Pour simplifier la rédaction de ce qui suit, , disons que c'est L_n qui tend vers L.

Comme L est positive, le théorème de Riesz affirme qu'il existe une mesure borélienne M positive sur K telle que $L(f)=\int_K f\,dM$: M n'est pas nulle car $\int_K 1\,dM=\lim\int_K 1\,dM_n=1$.

5) $M(x)=0$ pour tout $x\in K$

Deux cas se présentent.

Cas 1 : $\forall n$, il existe i tel que $x\in B_{n,i}$

D'après **3)**, il existe une fonction f_n continue de K dans $[0,1]$ qui vaut 1 en x et de support inclus dans $B_{n,i}$. On a :

$$\int_K f_n\,dM_n=1/2^n \text{ et pour } m\geq n,\ \int_K f_n\,dM_m\leq 2^{m-n}\times 1/2^m=1/2^n.$$

En passant à la limite en m, $\int_K f_n\,dM\leq 1/2^n$, d'où $M(x)=0$ **en vertu de 2)b.**

Cas 2 : à partir d'un certain rang, x n'est dans aucune des boules construites

Il existe alors une boule ouverte non vide $B(x,r)$ ne rencontrant pas les $B_{n,k}$ et à fortiori les $B_{m,k}$ pour $m\geq n$. Pour $f=f(x,r)$, $L_m(f)=0$ pour $m\geq n$ et donc $L(f)=0$, aussi $M(x)=0$ en vertu de **2) b**.

COMPLÉMENT. Il n'est pas nécessaire que K soit métrisable, il suffit même que K soit localement compact ; consulter le fil http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?12,930071

B - Existence d'une mesure diffuse μ sur tout métrique compact K non dénombrable

1) Le théorème de Cantor-Bendixson

Il s'énonce ainsi : *tout espace topologique E à base dénombrable $\mathcal{B}$ d'ouverts est la réunion disjointe d'un fermé parfait F et d'un ensemble au plus dénombrable D.*

DÉMONSTRATION. – Posons $F = \{x \in E : v(x) \text{ est non dénombrable pour tout voisinage de } x\}$ et $D = E - F$, et effectuons les vérifications nécessaires :

• D <u>est dénombrable</u>. Pour tout $x \in D$ il existe un voisinage $v(x)$ dénombrable et donc un ouvert dénombrable ω_n de la base $\mathcal{B}$ qui contient x, aussi D est-il contenu dans une réunion dénombrable d'ouverts dénombrables.

• F <u>est fermé car</u> D <u>est ouvert</u>. Si x n'est pas dans F, il existe un voisinage $v(x)$ dénombrable : tous les points de $v(x)$ ont la même propriété et donc $v(x)$ est dans D qui est donc ouvert.

• F <u>est sans point isolé</u>. Soit x dans F : tout $v(x)$ est indénombrable et $v(x) \cap D$ est dénombrable, aussi $v(x) \cap F = v(x) - v(x) \cap D$ est indénombrable, x n'est pas isolé.

2) Existence de µ

Puisque K est métrique compact, il est à base dénombrable d'ouverts : $K = P + D$, P étant un compact parfait et D une partie dénombrable.

P n'est pas vide sinon K serait dénombrable ; sur le compact parfait P existe une mesure m diffuse non nulle que l'on étend aux boréliens de K par $\mu(B) = \dfrac{m(B \cap P)}{m(P)}$: µ est alors diffuse et non nulle sur K.

C – Propriétés des mesures diffuses positives sur les métriques compacts

Soit (E,d) un espace métrique compact non dénombrable : on sait qu'existe sur les boréliens de E une mesure diffuse positive non nulle. Rappelons que toute mesure m positive sur E est régulière : $m(B) = \inf\{m(U) : U \text{ ouvert et contenant } B\} = \sup\{m(K) : K \text{ compact et contenu dans } B\}$ pour tout borélien B de E.

Si de plus m est diffuse, alors pour tout x de E et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U_x contenant x tel que $m(U_x) < \varepsilon$.

Rappelons enfin la signification dans cette note de la convergence d'une suite de mesures μ_n vers μ : $\int_E f \, d\mu_n \to \int_E f \, d\mu$ pour toute fonction numérique continue f sur E.

1) L'ensemble des mesures diffuses est dense [3]

Non seulement les mesures diffuses existent, mais en plus elles sont denses !

Soit Π_m l'ensemble des mesures de masse m donnée : c'est un compact faible d'après **1)**.
Pour α réel > 0, soit C_α l'ensemble des mesures µ de Π_m pour lesquelles il existe $a \in E$, dépendant de µ, tel que $\mu(a) \geq \alpha$: l'auteur démontre que **chaque** C_α **est fermé et d'intérieur vide**.

L'ensemble des mesures non diffuses étant la réunion dénombrable $\bigcup C_{1/n}$, cette réunion dénombrable est d'intérieur vide car Π_m est un espace de Baire : les probabilités diffuses forment alors un G_δ **dense** de Π_m.

Pour le plaisir du lecteur, je reproduis la démonstration de J. D. Knowles sur le caractère fermé de C_α. Soit μ_n une suite convergente de C_α : il nous faut montrer que la limite µ des μ_n est dans C_α.
Par hypothèses, il existe une suite (a_n) de E telle que $\mu_n(a_n) \geq \alpha$ et $\mu_n(f) \to \mu(f)$ pour toute f continue sur E : il faut trouver a dans E tel que $\mu(a) \geq \alpha$.

E étant métrique compact, (a_n) contient une sous-suite convergente de limite a : pour simplifier la rédaction, nous dirons que c'est (a_n) toute entière qui tend vers a.
Soit K_r la boule fermée $B'(a,r)$: à partir d'un certain rang, $a_n \in K$ et donc $\mu_n(K_r) \geq \mu_n(a_n) \geq \alpha$.
Admettons provisoirement le **lemme** : $\mu(K) \geq \limsup \mu_n(K)$ pour tout compact K.
Alors, pour tout $r > 0$, $\mu(K_r) \geq \limsup \mu_n(K_r) \geq \alpha$, et en faisant tendre r vers zéro, $\mu(a) \geq \alpha$, ce qui termine la démonstration.

Preuve du **lemme**.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U contenant le compact K tel que $\mu(U) \leq \mu(K) + \varepsilon$.
Il existe f continue sur E, à valeurs dans $[0,1]$, qui vaut 1 sur K et 0 sur le complémentaire de U. Alors, on a à la fois $\mu(K) \leq \mu(f) = \int_E f\, d\mu \leq \mu(U)$, et pour tout n, $\mu_n(K) \leq \mu_n(f) \leq \mu_n(U)$.
On en déduit que $\limsup \mu_n(K) \leq \lim \mu_n(f) = \mu(f)$, d'où

$$\limsup \mu_n(K) \leq \mu(f) \leq \mu(U) \leq \mu(K) + \varepsilon .$$

Le lemme s'établit en faisant tendre ε vers 0.

2) Si µ est diffuse sur un compact métrique , alors µ n'a pas d'atome

On raisonne par l'absurde en supposant qu'existe un borélien atome A : par définition $\mu(A) > 0$ et $\mu(B) = 0$ ou $\mu(A)$ pour tout borélien B inclus dans A.
Comme $m(A) = \sup\{m(K) : K \text{ compact } \textit{et contenu dans } A\}$ et que $\mu(K) = 0$ ou $\mu(A)$, il existe un compact K tel que $\mu(K) = \mu(A)$.
Pour tout x dans K, µ étant diffuse, il existe un ouvert U_x contenant x tel que $\mu(U_x) < \mu(A)$; comme $U_x \cap K \subset A$ et $\mu(U_x \cap K) < \mu(A)$, alors $\mu(U_x \cap K) = 0$.
K étant compact, il est recouvert par un nombre fini de U_x et alors $\mu(K) = 0$, d'où $\mu(A) = 0$, en contradiction avec l'hypothèse.

Deux conséquences importantes de l'inexistence d'atomes pour les mesures diffuses :

a) Pour tout réel t de l'intervalle $[0,\mu(E)]$, il existe un borélien B tel que $\mu(B)=t$

Mieux encore, pour tout borélien B et tout réel $t\in[0,1]$, il existe un borélien C inclus dans B tel que $\mu(C)=t.\mu(B)$. (**Source** : **[2]**, § **17.5**, pages 270 à 277.)

b) Si p est une probabilité diffuse sur E, il existe sur E des suites de variables aléatoires réelles indépendantes de toute loi

La loi d'une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},p)$ est une probabilité q sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$: réciproquement, q étant donnée sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, existe-t-il X de loi q ?

À cette question, j'ai apporté les réponses suivantes :

Pour que X existe <u>pour toute</u> q, il faut et il suffit qu'existe sur $(\Omega,\mathcal{T},p)$ une loi <u>uniforme</u> U ; pour qu'il existe sur $(\Omega,\mathcal{T},p)$ une loi uniforme U, il faut et il suffit que p soit <u>sans atome</u> sur $(\Omega,\mathcal{T})$. De plus, il existera pour toute q une suite X_n de variables indépendantes de loi q.

(Source : http://www.daniel-saada.eu/fichiers/22-existence_de_lois_uniformes.pdf)

On peut donc faire des probabilités en toute quiétude sur un métrique compact !

3) Pour toute mesure µ diffuse sur E, il existe un négligeable non dénombrable

On sait que E se décompose en $E=P+D$, P étant un compact parfait et D un ensemble dénombrable. La mesure µ reste diffuse sur P : si on trouve un négligeable non dénombrable dans P, l'assertion est établie.

Désignons par $\Delta=(a_n)_{n\geq 1}$ une suite dense de P.

Soit $\varepsilon>0$: pour tout n, il existe une boule ouverte de centre a_n dont la mesure est plus petite que $\varepsilon/2^n$. La réunion de ces boules est un ouvert dense U_ε avec $\mu(U_\varepsilon)<\varepsilon$ (U_ε est dense car U_ε contient Δ).

En posant $G=\bigcap U_{1/n}$ on fabrique un G_δ dense de mesure nulle (G est dense car il contient Δ).

En vertu du théorème de Baire, G ne peut être dénombrable car P est sans point isolé et donc ses points ne sont pas des ouverts : si $G=(g_n)$, alors $P=G+(P-G)=\bigcup g_n+\bigcup \complement U_n$ et P serait une réunion dénombrable de fermés sans point intérieur (chaque U_n est dense), or P est un espace de Baire.

Exemples

a) L'ensemble triadique de Cantor est négligeable pour la mesure de Borel-Lebesgue sur $[0,1]$ et a la puissance du continu (http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Cantor).

b) Un négligeable non dénombrable pour la probabilité diffuse sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$

Soit l'événement $E=\{(\omega_n):\omega_{2n+1}=\omega_{2n+2}\ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}\}$: E a la puissance du continu car il est en bijection avec l'ensemble des suites $(\omega_{2n+1})_{n\geq 0}$; la mesure de E est nulle parce que $E=\bigcap E_n$, où $E_n=\{(\omega_n):\omega_{2k+1}=\omega_{2k+2}\ pour\ k=0,1,...n\}$, et la mesure de chaque E_n est $1/2^{n+1}$ (merci à Pierre Bernard, Bruno Jaffuel et Clément de Seguins Pazzis).

Nous allons démontrer que l'on peut toujours trouver un négligeable indénombrable et *fermé* : c'est le cas pour les deux **Exemples** donnés ci-dessus, ce n'est pas le cas de G .

D – Existence d'un négligeable fermé non dénombrable pour les mesures diffuses sur les métriques compacts non dénombrables

La recherche d'un fermé négligeable non dénombrable équivaut à l'obtention d'un compact parfait négligeable car selon le **§ 2 de la note 26** :
– un métrique compact sans point isolé a au moins la puissance du continu
– si F est un fermé négligeable non dénombrable, alors F= P+D, P compact parfait non vide, m(P)=0, et P non dénombrable.

Les deux démonstrations que nous donnons reposent également sur le résultat suivant :
tout espace métrique polonais non dénombrable contient une partie homéomorphe à l'espace de Cantor $\mathcal{C}=\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ (http://www.daniel-saada.eu/Notes/26-Sur-les-espaces-polonais.pdf).

1) Première démonstration

Nous avons établi en **C 3)** l'existence d'un G_δ négligeable et non dénombrable dans la partie parfaite P du compact E : nous allons prouver que ce G_δ, noté G , contient un compact non dénombrable, lequel sera évidemment de mesure nulle.

a) G est homéomorphe à un espace métrique complet

Voici la démarche, les démonstrations sont omises :
Si $G=\bigcap U_n$, où U_n est ouvert, on pose

(i) $\delta_n(x,y)=d(x,y)+e_n(x,y)$ avec $e_n(x,y)=\left|\dfrac{1}{d\left(x,\complement U_n\right)}-\dfrac{1}{d\left(y,\complement U_n\right)}\right|$ et on démontre que (U_n,δ_n) est un métrique complet et l'identité une homéomorphie entre (U_n,d) et (U_n,δ_n) .

(ii) $\delta(x,y)=\sum_1^\infty 2^{-n}.\min\left(\delta_n(x,y),1\right)$ et on démontre que (G,δ) est un métrique complet et l'identité une homéomorphie entre (G,d) et (G,δ).

b) G contient un compact parfait
Comme (G,d) est séparable, (G,δ) l'est aussi ; (G,δ) étant un polonais non dénombrable, il contient une partie homéomorphe à l'espace $\mathcal{C}$ de Cantor.

Par homéomorphie inverse, G contient un compact non dénombrable ; ce compact est parfait car homéomorphe à $\mathcal{C}$ qui est parfait (http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_parfait).
Ce parfait est de mesure nulle puisque contenu dans G .

2) Deuxième démonstration (Alain Rémondière)

On dira qu'un espace métrique compact K a la propriété (P) si pour toute mesure diffuse sur K il existe un fermé non dénombrable négligeable.

a) Le compact $[0,1]$ a la propriété (P)

Soit m une mesure diffuse sur $[0,1]$: s'il existe un segment non réduit à un point de mesure nulle, la démonstration est achevée. On supposera donc que la fonction de répartition de m est strictement croissante.

Si $I=[a,b]$ est un segment de $[0,1]$ de longueur non nulle, on le coupe en trois segments égaux en longueur d'intérieurs disjoints. Comme m est diffuse, l'un au moins de ces trois segments est de mesure $\geq m(I)/3$. On en choisit un :

la réunion des deux autres est notée $g(I)$ et a une mesure $\leq 2m(I)/3$.

On étend la construction de g à toute réunion finie de segments de $[0,1]$ d'intérieurs disjoints.
On peut alors définir une suite K_n de compacts de $[0,1]$ par $K_0=[0,1]$ et $K_{n+1}=g(K_n)$.
Par construction, K_n est la réunion de 2^n segments d'intérieurs disjoints de longueur $1/3^n$ tels que chaque segment de K_n soit la réunion de deux segments de K_{n+1}.
Par construction aussi, $m(K_n)=(2/3)^n\times m\left([0,1]\right)$.
Les K_n étant décroissants non vides leur intersection est un compact non vide noté K dont la mesure est nulle pour m .

K est un parfait négligeable.
Soit I un des segments de longueur $1/3^n$ définissant K_n : pour tout $p\in\mathbb{N}$, $I\cap K_{n+p}\neq\varnothing$ et donc $K\cap I$ est non vide.
Si x est dans K et $n\geq 1$, x est dans un segment I de K_n. Ce segment I est la réunion de quatre segments de K_{n+2}, que nous noterons I_1,I_2,I_3,I_4.
Comme x ne peut être dans ces quatre segments à la fois, alors, par exemple, x est dans I_1 et pas dans I_2 : I_2 contient un point de K qui n'est pas x et qui est à distance de x inférieure à $1/3^n$.

b) L'espace de Cantor a la propriété (P)

Soit µ une mesure diffuse sur $\mathcal{C}$.
Soit f de $\mathcal{C}$ dans $[0,1]$ qui à $x=(x_n)$ associe $\sum_1^\infty x_n/2^n$: f est continue surjective et tout y de $[0,1]$ a un seul antécédent, sauf les rationnels de la forme $k/2^n$ qui ont en deux (hormis 0 et 1).
Soit m la mesure image par f de µ sur $[0,1]$, $m=\mu\circ f^{-1}$: m est diffuse car l'image réciproque

d'un point de $[0,1]$ est constituée d'au plus deux éléments et µ est diffuse.

D'après **a)**, il existe un compact parfait K de $[0,1]$ qui est négligeable pour m : alors $L = f^{-1}(K)$ est fermé dans $\mathcal{C}$ car f est continue et L a la puissance du continu.

L est un parfait négligeable pour μ.

D'abord, $\mu(L) = m(K) = 0$.

Soit $x = (x_n)$ dans L : $y = f(x) \in K$.

Pour $n > 1$, notons O_n l'ensemble des suites $s = (s_n)$ telles que pour tout $k \le n$, $s_k = x_k$: les O_n forment un système fondamental de voisinages (ouverts et fermés) de x dans $\mathcal{C}$.

$f(O_n)$ est un segment J de $[0,1]$ de longueur $1/2^n$ qui contient y : en effet, si $s \in O_n$,

$$\sum_1^n x_k / 2^k \le f(s) = \sum_1^\infty s_n / 2^n \le \sum_1^n x_k / 2^k + \sum_{n+1}^\infty 1/2^k .$$

Comme K est parfait, $K \cap J$ contient un élément z différent de y : z est l'image d'un point x' de O_n ; ce point x' est dans L car $f(x') \in K$ et il est différent de x car $f(x) \ne f(x')$:

x n'est donc pas un point isolé de L et L est parfait .

c) Tout métrique compact non dénombrable a la propriété (P)

On se donne µ diffuse sur K.

D'après **B 1)**, $K = P + D$ avec P parfait et D dénombrable : P est non vide sinon K serait dénombrable. Comme P est un métrique compact parfait, il contient un sous ensemble A homéomorphe à l'espace de Cantor $\mathcal{C}$ (note 26).

Si $\mu(A) = 0$, on a fini car A est parfait comme $\mathcal{C}$.

On suppose donc $\mu(A) > 0$.

Soit h l'homéomorphie de A sur $\mathcal{C}$: $m = \mu \circ h^{-1}$ est une mesure diffuse sur $\mathcal{C}$.

D'après **b)**, il existe F fermé non dénombrable dans $\mathcal{C}$ tel que $m(F) = 0$: alors $\mu\left(h^{-1}(F)\right) = 0$ et $h^{-1}(F)$ est un fermé non dénombrable de K, ce qui termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe*.

[2] Daniel Saada, *Tribus et probabilités sur les univers infinis*, consultable sur : http://books.google.fr/books?id=jgDAgAAQBAJ&pg=PA8&dq=livres+daniel+saada&hl=fr&sa=X&ei=xFMkU4qsC6rO0AWsr4CYBw&ved=0CFEQ6AEwAQ#v=onepage&q=livres%20daniel%20saada&f=false

[3] J. D. Knowles, *On the existence of non-atomic measures*, http://journals.cambridge.org.sci-hub.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=6965444