SUR UN THÉORÈME DE M. TALAGRAND

www.daniel-saada.eu

http://archive.numdam.org/ARCHIVE/SC/SC_1977___17_2/SC_1977___17_2_A10_0/SC_1977___17_2_A10_0.pdf

1) Traces d'une tribu engendrée

Soit $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par une sous-famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ et A un événement de Ω. Nous allons prouver que la trace de $\mathcal{T}$ sur A est la tribu engendrée par $\mathcal{F} \cap A$ (ce sont deux sous-tribus de $\mathcal{P}(A)$). En d'autres termes, $\mathcal{T}(\mathcal{F}) \cap A = \mathcal{T}(\mathcal{F} \cap A)$: *la trace d'une tribu engendrée par $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par la trace de $\mathcal{F}$* **.**

Démonstration. La trace de $\mathcal{T}$ sur A est l'ensemble $\{T \cap A : T \in \mathcal{T}(\mathcal{F})\}$, $\mathcal{F} \cap A$ étant $\{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$.

Nous prouvons l'égalité cherchée par double inclusion.

a) comme $F \cap A$ est dans $\{T \cap A : T \in \mathcal{T}(\mathcal{F})\}$, la tribu engendrée $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cap A)$ est incluse dans $\{T \cap A : T \in \mathcal{T}(\mathcal{F})\}$.

b) pour établir que $\{T \cap A : T \in \mathcal{T}(\mathcal{F})\}$ est dans $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cap A)$, on envisage $\{T \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) : T \cap A \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cap A)\}$: c'est une tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$ (elle contient Ω, est stable par complémentaire et par réunion dénénombrable). Cette tribu contient $\mathcal{F}$ par définition, donc contient $\mathcal{T}(\mathcal{F})$.

2) Dans tout métrique séparable E, la tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$ est engendrées par les boules de rayon $\leq \varepsilon$

Par définition, $\mathcal{B}(E)$ est la tribu engendrée par les ouverts de E. Comme E est à base dénombrable d'ouverts, tout ouvert de E est une réunion dénombrable de boules ouvertes. La tribu engendrée par les boules ouvertes est donc $\mathcal{B}(E)$. C'est un résultat classique (voir ici en cas de besoin).

Montrons maintenant, sans plus de difficulté que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{B}(E)$ est engendrée par les boules de rayon $\leq \varepsilon$.

Soit U un ouvert de E : pour tout x de U, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$, et alors $B(x, \min(r,\varepsilon)) \subset U$. Ces boules forment un recouvrement ouvert de U, on peut donc en extraire un recouvrement dénombrable. Ainsi U est réunion dénombrable de boules de rayon $\leq \varepsilon$ et l'assertion est démontrée.

3) Si un espace métrique X n'est pas séparable, 2) est pris en défault

On va montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(E)$ n'est pas engendrée par les boules de rayon $\leq \varepsilon$.

a) Il existe un entier $n > 0$ et Ω infini *non dénombrable* $\subset X$ tel que $d(x,y) \geq 1/n$ sur Ω^2 quand $x \neq y$

Soit u et v deux points distincts de X et posons $a = d(u,v)$.

Pour n entier $\geq 1/a$, soit $\mathcal{A}_n$ la classe non vide des parties A de X telles que $d(x,y) \geq 1/n$ sur A^2 quand $x \neq y$.

$\mathcal{A}_n$ est un ensemble partiellement ordonné par l'inclusion et *inductif* : d'après le Thérème de Zorn (mon livre, chapitre 17), $\mathcal{A}_n$ contient une partie maximale pour l'inclusion, on la notera A_n. Prouvons que la réunion des A_n est dense dans X.

Soit $x \in X$: pour tout $n \geq 1/a$, il existe a_n dans A_n tel que $d(x,a_n) < 1/n$, sinon $A_n \cup \{x\}$ serait dans $\mathcal{A}_n$ et A_n ne serait pas maximale dans $\mathcal{A}_n$. La suite (a_n) ayant x pour limite, la réunion des A_n est dense dans X.

Comme X n'est pas séparable, la réunion des A_n n'est pas dénombrable, donc un de ses constituants A_n est indénombrable : nous poserons $\Omega = A_n$.

b) Ω est un borélien de X car c'est un ouvert (et un fermé), tout sous-ensemble de Ω est un fermé-ouvert, donc borélien : *toute* partie de Ω est borélienne.

c) Il existe Z dans Ω tel que $card\, Z > \aleph_0$ *et* $card(\Omega - Z) > \aleph_0$
D'après l'Hypothèse du continu, puisque $card\,\Omega > \aleph_0$, alors $card\,\Omega \geq \aleph_1 = card\mathbb{R}$. Il existe alors une injection f de $\mathbb{R}$ dans Ω : $Z = f(\mathbb{R}^+)$ convient, car $\Omega - Z$ contient l'indénombrable $f\left(]-\infty, 0[\right)$. (Xavier Oudot).

d) Soit $\mathcal{T}$ la sous-tribu de $\mathcal{P}(X)$ engendrée par la famille $\mathcal{F}$ des boules de rayon $\leq \varepsilon / 2$.
D'après **1)**, la trace de $\mathcal{T}$ sur Ω est la tribu engendrée par la trace de $\mathcal{F}$ sur Ω. La trace de $\mathcal{F}$ sur Ω est l'ensemble des singletons de Ω. La tribu engendrée par les singletons est constituée des parties de Ω qui sont soit dénombrable (au plus), soit de complémentaire (dans Ω) dénombrable. Cette tribu ne contient donc pas Z.
Si Z appartenait à $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$, l'égalité $Z = Z \cap \Omega$ prouverait que Z serait dans la trace de $\mathcal{T}$ sur Ω.
Il en résulte que Z n'est pas dans $\mathcal{T}$.