SUR UN THÉORÈME DE HARDY

www.daniel-saada.eu

Soit f dérivable sur un voisinage de $+\infty$: on peut donc supposer que f est dérivable sur $]A,+\infty[$ avec $A>0$; si $f(x)\sim Cx^u$ en $+\infty$, les réels C et u étant >0 et si f' est croissante, alors $f'(x)\sim Cux^{u-1}$.

Preuve. Par convexité, on a d'abord $u\geq 1$ car le graphe d'une fonction convexe est au dessus de toutes ses tangentes. Par convexité encore, $f'(x)\leq \dfrac{f(x+ax)-f(x)}{ax}$ pour tout $a>0$. Comme x est positif,

$$\frac{f'(x)}{x^{u-1}}\leq \frac{f(x+ax)-f(x)}{ax^u},$$

et puisque $f(x+ax)-f(x)\sim C\left((1+a)^u-1\right)x^u$, $\dfrac{f(x+ax)-f(x)}{ax^u}\underset{x\to+\infty}{\to} C\dfrac{(1+a)^u-1}{a}$.

Or $C\dfrac{(1+a)^u-1}{a}$ tend vers Cu quand a tend vers 0 : il existe donc $a_0>0$ tel que $\dfrac{(1+a_0)^u-1}{a_0}<Cu+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ donné.

Ensuite, il existe x_0 tel que $x\geq x_0$ entraîne $\dfrac{f(x+a_0x)-f(x)}{a_0x^u}\leq Cu+\varepsilon$, par conséquent $x\geq x_0$ implique $\dfrac{f'(x)}{x^{u-1}}\leq Cu+\varepsilon$. Avec $f'(x)\geq \dfrac{f(x)-f(x-ax)}{ax}$ ($a>0$), on aurait abouti à $\dfrac{f'(x)}{x^{u-1}}\geq Cu-\varepsilon$ pour $x\geq x_1$,

ce qui termine la démonstration.