DEUX EXEMPLES DE TRIBUS SANS ATOME

www.daniel-saada.eu

Un atome A d'une tribu $\mathcal{T}$ est un élément non vide de $\mathcal{T}$ minimal pour l'inclusion : $B \in \mathcal{T}$ et $B \subset A$ impliquent $B = A$ ou $B = \varnothing$. Si l'univers Ω est dénombrable, toute tribu a des atomes. Quand Ω est infini non dénombrable, il se peut qu'une tribu ait des atomes (un singleton par exemple) ou n'en possède pas. Nous donnons deux exemples de tribu sans atome, sur l'univers $\Omega = \{0,1\}^I$, avec I infini non dénombrable, ensemble des fonctions x de I dans $\{0,1\}$. Merci à Paul BARBAROUX qui m'a communiqué ces deux exemples.

A) Une tribu sans atome sur Ω

Pour $J \subset I$, J *non vide fini ou dénombrable*, et pour B sous-ensemble *non vide* de $\{0,1\}^J$, on pose

$F(J,B) = \{x \in \Omega : x/J \in B\}$, x/J désignant la restriction de x sur J.

Lorsque J est réduit à un seul élément j de I, si B est l'application $j \mapsto 0$, $F(J,B) = \{(x_i) \in \{0,1\}^I : x_i = 0\}$, que l'on notera F_i, si B est l'application $j \mapsto 1$, $F(J,B) = \{(x_i) \in \{0,1\}^I : x_i = 1\}$, que l'on notera P_i, et si $B = \{0,1\}$, $F(J,B) = \Omega$.

Lorsque J et B varient, avec leurs conditions, les $F(J,B)$ forment, avec la partie vide, une tribu :

- d'abord, $\overline{F(J,B)} = F(J,\overline{B})$, où $\overline{B} = \{0,1\}^J - B$ et $\overline{F(J,B)} = \Omega - F(J,B)$;
- ensuite, $\bigcap_n F(J_n, B_n) = F(J,B)$ avec $J = \bigcup_n J_n$, qui reste dénombrable, et B l'ensemble des fonctions de J dans $\{0,1\}$ telles que, pour tout n, leur restriction à J_n est dans B_n (en général B est vide sauf quand les J_n sont disjoints) ;
- enfin, Ω est comme on l'a vu un $F(J,B)$.

Cette tribu est sans atome, car dans un $F(J,B)$ on peut construire un $F(J',B')$ strictement inclus dans $F(J,B)$: puisque J est dénombrable et que I ne l'est pas, il existe $i \in I - J$: on pose $J' = J + i$, B' devant être contenu dans $\{0,1\}^{J+i}$. On définit B' en prolongeant les fonctions b de B par $b(i) = 1$. Alors $F(J',B') \subset F(J,B)$, mais les x de $F(J,B)$ vérifiant $x(i) = 0$ ne sont pas dans $F(J',B')$. En d'autres termes, $F(J',B') = F(J,B) \cap P_i$.

B) La tribu produit est aussi sans atome

La tribu produit $\mathcal{T}'$ de $\{0,1\}^I$ est, rappelons-le, la tribu engendrée par les événements P_i et F_i, i décrivant I :

$$P_i = \{(x_i) \in \{0,1\}^I : x_i = 1\},\ F_i = \{(x_i) \in \{0,1\}^I : x_i = 0\}.$$

C'est la plus petite tribu rendant mesurables les applications coordonnées $X_i : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_i$.

Remarque. Si I est dénombrable, les singletons sont dans la tribu $\mathcal{T}'$: tout singleton (x_i) est l'intersection *dénombrable* des $(P_j)_{j \in J}$ et des $(Q_k)_{k \in K}$, où $J = \{j \in I : x_j = 1\}$ et $K = \{k \in I : x_k = 0\}$ ($K = I - J$).

La tribu produit $\mathcal{T}'$ est une sous-tribu de $\mathcal{T}$ définie en **A)** car $\mathcal{T}$ contient également tous les P_i et F_i.

Il en résulte que tous les éléments de $\mathcal{T}'$ sont des $F(J,B)$.

$\mathcal{T}'$ est également sans atome car $F(J,B) \in \mathcal{T}'$ impliquera $F(J',B') \in \mathcal{T}'$ puisque $P_i \in \mathcal{T}'$.

Prouvons enfin que $\mathcal{T}'$ est strictement incluse dans $\mathcal{T}$. Engendrée par une famille de cardinal $\mathfrak{c}$, $\mathcal{T}'$ est de cardinal au plus $\mathfrak{c}$, tandis que, pour J infinie fixée, l'ensemble des parties B est déjà de cardinal $2^{\mathfrak{c}}$.