LA CONVERGENCE EN LOI

www.daniel-saada.eu

(X_n) et X sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On suppose que X_n tend en loi vers X.

On appelle p_n et p les lois de X_n et de X, F_n et F leurs fonctions de répartition. Par hypothèse donc,

$$F_n(x) = p_n(]-\infty, x]) = p(X_n \leq x) \to F(x) = p(]-\infty, x]) = p(X \leq x)$$

si F est continue en x, condition équivalente à $P(X = x) = 0$ ou $p(\{x\}) = 0$.

Rappelons que F est continue sauf sur un ensemble au plus dénombrable de réels, est continue à droite en tout réel x et posséde en x une limite à gauche, qui sera notée $F(x-)$. La frontière d'une partie A de $\mathbb{R}$, notée ∂A, est la différence entre son adhérence $\overline{A}$ et son intérieur $\overset{0}{A}$; $p(\partial A) = p(\overline{A}) - p(\overset{0}{A})$ et $p(\partial A) = 0$ équivaut à $p(A) = p(\overline{A}) = p(\overset{0}{A})$. Nous prouvons l'équivalence des cinq assertions suivantes :

1) $X_n \to X$ en loi

2) pour tout ouvert U, $\liminf\limits_n p_n(U) \geq p(U)$

3) pour tout fermé F, $\limsup\limits_n p_n(F) \leq p(F)$

4) pour tout borélien B tel que $p(\partial B) = 0$, $\lim\limits_n p_n(B) = p(B)$

5) pour toute f continue bornée, $E[f \circ X_n] = \int_{\mathbb{R}} f\, dp_n \to E[f \circ X] = \int_{\mathbb{R}} f\, dp$.

1) implique 2)

a) $\liminf\limits_n p_n(U) \geq p(U)$ **si** $U =]-\infty, x[$

D'abord $p(U) = F(x-)$ car $]-\infty, x[$ est la réunion croissante des $]-\infty, x - 1/n]$. En conséquence

$$\liminf_n p_n(U) \geq p(U) \text{ équivaut à } F(x-) \leq \liminf F_n(x-).$$

L'ensemble des points de discontinuité de F étant au plus dénombrable, il existe une suite (x_n) de points de continuité qui est croissante et de limite x. Donnons-nous un réel $\varepsilon > 0$.

Pour k fixé, il existe un entier n_k au delà duquel

$$F(x_k) \leq F_n(x_k) + \varepsilon, \text{ d'où } F(x_k) \leq F_n(x-) + \varepsilon.$$

On en déduit $F(x_k) \leq \inf\limits_{n \geq n_k} F_n(x-) + \varepsilon \leq \varepsilon + \liminf F_n(x-)$; comme k est arbitraire,

$F(x-) \leq \varepsilon + \liminf F_n(x-)$; en faisant tendre ε vers 0, $F(x-) \leq \liminf F_n(x-)$.

b) $\liminf\limits_n p_n(U) \geq p(U)$ **si** U **est un intervalle ouvert** $]a, b[$

On va utiliser cette fois l'inégalité $p(X \leq x) \geq \limsup p(X_n \leq x)$, ou $F(x) \geq \limsup F_n(x)$, qui se démontre comme $F(x-) \leq \liminf F_n(x-)$. Par additivité,

$$p(U) = p\left(]-\infty, b[\right) - p\left(]-\infty, a]\right) = F(b-) - F(a) \leq \liminf F_n(b-) - \limsup F_n(a)$$

d'où $p(U) \leq \liminf F_n(b-) - \liminf\left(-F_n(a)\right) = \liminf\left(F_n(b-) - F_n(a)\right) = \liminf p_n(U)$.

c) $\liminf_n p_n(U) \geq p(U)$ **si** U **est ouvert**

On sait que $U = \sum I_n$ où les I_n sont des intervalles ouverts et disjoints.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe N tel que $p(U) \leq \varepsilon + \sum_1^N p(I_k)$, d'où

$$p(U) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^N \liminf_n p_n(I_k) \leq \varepsilon + \liminf_n p_n\left(\sum_1^N I_k\right) \leq \varepsilon + \liminf_n p_n(U)$$

et comme ε est arbitraire, $p(U) \leq \liminf_n p_n(U)$.

2) est équivalent à 3) par passage au complémentaire

En particulier, $p\left(]-\infty, x]\right) \geq \limsup_n p_n\left(]-\infty, x]\right)$ lorsque F n'est pas continue en x.

2) et 3) impliquent 4)

Comme $\overset{0}{B} \subset B \subset \overline{B}$, $\limsup p_n(B) \leq \limsup p_n(\overline{B}) \leq p(\overline{B})$, car $\overline{B}$ est un fermé, et

$p(\overset{0}{B}) \leq \liminf p_n(\overset{0}{B}) \leq \liminf p_n(B)$ car $\overset{0}{B}$ est ouvert.

Quand $p(\overset{0}{B}) = p(\overline{B})$, $p(B) \leq \liminf p_n(B) \leq \limsup p_n(B) \leq p(B)$ et donc $p_n(B) \to p(B)$.

Remarque. On peut avoir $\lim_n p_n(B) = p(B)$ sans que $p(\partial B) = 0$: cette condition suffisante n'est pas nécessaire.

Par exemple, si toute les X_n et X sont diffuses, $p_n(Q) = p(Q) = 0$, $\partial Q = R$ et $p(\partial Q) = 1$.

4) implique 1)

$]-\infty, x]$ a pour frontière le singleton $\{x\}$, de mesure nulle pour p quand F est continue en x.

Les assertions 1), 2), 3), 4) sont donc équivalentes.

4) implique 5)

Soit φ continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Grâce à la décomposition $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, on peut supposer $\varphi \geq 0$ puisqu'on veut établir $\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dp_n \to \int_{\mathbb{R}} \varphi\, dp$. Soit $K > 0$ tel que $0 \leq \varphi \leq K$: on sait que (mon livre, **14.3**, page **226**)

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dp_n = \int_0^K p_n(\varphi > t)dt \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \varphi\, dp = \int_0^K p(\varphi > t)dt.$$

Désignons par U_t l'ouvert $\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) > t\}$. L'adhérence de U est incluse dans le fermé $\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \geq t\}$, la frontière de U est donc incluse dans $\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = t\} = \varphi^{-1}(t)$. Pour toute probabilité sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, et en particulier donc pour p, $p\left(\varphi^{-1}(t)\right) = 0$ *sauf pour un ensemble* D *au plus dénombrable de réels* t.

Quand t n'est pas dans D, $p_n(\varphi > t) \to p(\varphi > t)$ en vertu de **4)** : D dénombrable étant de mesure nulle pour dt, $t \to p_n(\varphi > t)$ converge donc presque partout sur $[0, K]$ vers $t \to p(\varphi > t)$; le théorème de convergence dominée permet d'affirmer que $\int_0^K p_n(\varphi > t)dt$ tend vers $\int_0^K p(\varphi > t)dt$ et donc que $\int_{\mathbb{R}} \varphi dp_n \to \int_{\mathbb{R}} \varphi dp$.

Exemple important. $X_n \to X$ en loi implique donc que, pour tout réel t, $E[e^{itX_n}] \to E[e^{itX}]$, car les fonctions $x \to e^{itx}$ sont continues et bornées et d'après le théorème du transfert, $\int_{\mathbb{R}} (x \to e^{itx})dp_n = E[e^{itX_n}]$ et $\int_{\mathbb{R}} (x \to e^{itx})dp = E[e^{itX}]$). Ce résultat est du au mathématicien français Paul Lévy.

5) implique 2)

La fonction indicatrice d'un ouvert U est la limite de la suite des fonctions $\varphi_n(x) = \min\left(n.d(x,F),1\right)$, où F est le fermé complémentaire de U, $F = \mathbb{R} - U$. Chaque φ_n est continue et (φ_n) est une suite croissante de limite 1_U.

D'abord, $p(U) = \sup\limits_k \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_k \, dp\right)$ en vertu du théorème de Beppo-Levi.

Ensuite, $p(U) \leq \sup\limits_k \left(\lim\limits_n \int_{\mathbb{R}} \varphi_k \, dp_n\right)$ car les φ_k sont continues et bornées.

Enfin, $p(U) \leq \sup\limits_k \left(\liminf\limits_n \int_{\mathbb{R}} \varphi_k \, dp_n\right)$ car la suite (φ_k) est croissante.

Comme de plus $\int_{\mathbb{R}} \varphi_k \, dp_n \leq p_n(U)$ implique $\liminf\limits_n \int_{\mathbb{R}} \varphi_k \, dp_n \leq \liminf\limits_n p_n(U)$ pour tout k :

$$p(U) \leq \sup_k \left(\liminf_n \int_{\mathbb{R}} \varphi_k \, dp_n\right) \leq \liminf_n p_n(U) \text{,cqfd.}$$

Conséquence de 5) : pour toute fonction g continue sur $\mathbb{R}$, $g \circ X_n \to g \circ X$ en loi.

En effet, pour toute f continue bornée, $f \circ g$ est continue bornée.

Compléments

6) $X_n \to X$ en loi si et seulement si, pour tout réel t, $E[e^{itX_n}] \to E[e^{itX}]$: ces deux résultats sont dus à Paul Lévy.

7) $X_n \to X$ en loi si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} f \, dp_n \to \int_{\mathbb{R}} f \, dp$ pour les f continues à support compact sur $\mathbb{R}$.

Problématique : pour presque tout x, $p_n\left(]-\infty,x]\right)\to p\left(]-\infty,x]\right)$, il est naturel de chercher les boréliens B de R tel que $p_n(B)\to p(B)$. Structure de ces boréliens : R est dedans, stable par complémentaire, réunion disjointe finie et différence.

Une fois ces B trouvés, on a donc $\int_R 1_B dp_n \to \int_R 1_B dp$ et il est naturel de chercher les f telles que $\int_R f dp_n \to \int_R f dp$