Exercice d'Oral 111

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$(R , C) une fonction 1-périodique. On pose I = $\int_0^1 f$. Soit, pour n $\in$ N*, R_n l'approximation de I obtenue en appliquant la méthode des rectangles à n pas constants entre 0 et 1. Montrer, si p$\in$N *, que : R_n = I + O(1/n^p).

Solution de Daniel Saada (le 2 février 2009)

Puisque f est C^1, f est la somme de sa série de Fourier : $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$; comme la convergence des sommes partielles vers f est uniforme sur [0,1], $\int_0^1 f = c_0$.

La fonction f étant aussi C^2, la série $\sum_{-\infty}^{\infty} n^4 \,|\, c_n\,|^2$ est convergente (c'est la formule de Parseval appliquée à f''). L'approximation $R_N = \dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k/N)$ est la somme double $\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi ink/N}$; comme la série de terme général $|\,c_n\,|$ converge (car $n^2\,|\,c_n\,|$ tend vers 0), on a le droit d'inverser le sens de sommation :

$NR_N = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ink/N}$. Or $\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ink/N}$ est nul pour n non multiple de N et vaut N pour n multiple de N, d'où $\left|\int_0^1 f - R_N\right| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\,c_{kN}\,|$.

Soit p dans $\mathbb{N}^*$: f étant de classe C^p par hypothèse, $c_n = \circ(1/n^p)$ quand n tend vers $\pm\infty$. Il en résulte qu'il existe un réel λ_p tel que $|\,c_n\,| = \lambda_p / |\,n\,|^p$ pour tout n non nul. Aussi, $\left|\int_0^1 f - R_N\right| \le \lambda_p \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} 1/|\,kN\,|^p$ et donc

$R_N - \int_0^1 f = \mathrm{O}(1/N^p)$ pour $p \ge 2$; évidemment, il en est de même pour $p = 1$.

La méthode des rectangles est donc extrêmement performante pour calculer l'intégrale sur une période d'une fonction périodique indéfiniment dérivable. Au terme de cet exercice, une question se pose : est-il possible de trouver un équivalent de $R_N - \int_0^1 f$ quand N tend vers l'infini ?