NOTE 26 – UN ESPACE POLONAIS NON DÉNOMBRABLE CONTIENT TOPOLOGIQUEMENT L'ENSEMBLE DE CANTOR

www.daniel-saada.eu

On dit qu'un espace topologique E contient topologiquement l'ensemble de Cantor $\mathcal{C}$ s'il existe une partie de E homéomorphe à $\mathcal{C}$. On dira plus brièvement que E contient $\mathcal{C}$, ou que $\mathcal{C}$ se plonge dans E. Nous prouvons que tout espace polonais, c.à.d. métrique complet séparable, contient $\mathcal{C}$ s'il n'est pas dénombrable. Souvent invoqué (nous en donnons une application) ce résultat important est rarement justifié : aussi m'a-t-il paru utile d'en publier une démonstration.

1) Ensemble et espace de Cantor

L'espace de Cantor est $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$,(ou $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ peu importe) qui est métrique compact pour la distance $\delta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$, où $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$. On sait que $\mathcal{C}$ a la puissance du continu.

L'ensemble de Cantor est homéomorphe à *l'ensemble triadique* de Cantor : à $x = (x_n) \in \mathcal{C}$, on associe le réel $\sum_1^\infty 2x_n / 3^n$ et cette correspondance est bijective et bicontinue.
En particulier, *l'ensemble triadique* de Cantor a lui aussi la puissance du continu.

$\mathcal{C}$ <u>est sans point isolé</u> : pour tout x de $\mathcal{C}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in \mathcal{C}$ tel que $0 < \delta(x,y) < \varepsilon$.
Si $x = (x_1,\ldots,x_{n-1},x_n,x_{n+1},\ldots)$, prendre $x^n = (x_1,\ldots,x_{n-1},1-x_n,x_{n+1},\ldots)$, alors $0 < \delta(x,x^n) = 1/2^n$.

2) Tout métrique complet (F,d) sans point isolé contient Cantor

On se donne une boule <u>fermée</u> B de F de rayon $r > 0$ et de centre $c \in F$.

a) Il existe dans B deux boules <u>fermées</u> disjointes B_0 et B_1 de rayon $r_1 < r/2$.

En effet, comme c n'est pas isolé, il existe a distinct de c dans la boule ouverte $B(c,r)$:

$$0 < d(a,c) < r.$$

Soit $r_1 > 0$ tel que $r_1 < d(a,c)/2$ et $r_1 \le r - d(a,c)$: les boules <u>fermées</u> $B'(a,r_1)$ et $B'(c,r_1)$ sont dans B et disjointes et enfin $r_1 < d(a,c)/2 < r/2$.

b) Dans B_0 existent de même deux boules fermées disjointes de rayon $r_2 < r/4$, notées B_{01} et B_{01}. Dans B_1 existent deux boules fermées disjointes de rayon $r_2 < r/4$, notées B_{10} et B_{11}.

c) On fabrique ainsi, pour tout $n \ge 1$, 2^n boules fermées disjointes, de rayon $r_n < r/2^n$, indicées par $\{0,1\}^n$. Par construction, B_s est incluse dans B_t si $s = (s_1,\ldots,s_n)$ et $t = (s_1,\ldots,s_n,t_{n+1})$.

d) Construction d'une application f de $\mathcal{C}$ dans F

Si $x=(x_n)\in C$, appelons B_n la boule fermée $B'_{(x_1,\ldots,x_n)}$: les B_n sont décroissantes et leur diamètre tend vers 0. Comme F est complet, $\bigcap B_n$ contient un point et un seul [1], noté y.

On pose alors $f(x)=y$.

e) f est injective sur $\mathcal{C}$

Si $x\neq x'$, il existe n tel que $x_n\neq x'_n$: soit p le plus petit entier tel que $x_p\neq x'_p$.
Les boules $B_{(x_1,\ldots,x_{p-1},x_p)}$ et $B_{(x_1,\ldots,x_{p-1},x'_p)}$ sont alors disjointes : comme $y=f(x)\in B_{(x_1,\ldots,x_{p-1},x_p)}$ et $y'=f(x')\in B_{(x_1,\ldots,x_{p-1},x'_p)}$, y et y' sont distincts.

f) f est continue sur $\mathcal{C}$

Soit (x^p) une suite de $\mathcal{C}$ qui converge vers $x\in\mathcal{C}$: pour $p>p_N$, $\delta(x,x^p)<1/2^N$ et donc $x^p{}_1=x_1,\ldots,x^p{}_N=x_N$. Il en résulte que pour $p>p_N$, $f(x)$ et $f(x^p)$ sont dans une même boule de rayon $r/2^N$ et $f(x^p)\to f(x)$.

g) f est une homéomorphie de $\mathcal{C}$ sur $f(\mathcal{C})$ car $\mathcal{C}$ est compact.

Nous avons donc établi que l'espace complet (F,d) sans point isolé contient une partie homéomorphe à $\mathcal{C}$.

Conséquence. **Tout métrique complet sans point isolé a au moins la puissance du continu.**

3) Le théorème de Cantor-Bendixson

Il s'énonce ainsi : *tout espace topologique E à base dénombrable $\mathcal{B}$ d'ouverts est la réunion disjointe d'un fermé sans point isolé F et d'un ensemble au plus dénombrable D.*

DÉMONSTRATION. – Posons $F=\{x\in E : v(x) \textit{ est non dénombrable pour tout } \text{voisinage } \textit{de } x\}$ et $D=E-F$, et effectuons les vérifications nécessaires :

- D <u>est dénombrable</u>. Pour tout $x\in D$ il existe un voisinage $v(x)$ dénombrable et donc un ouvert dénombrable ω_n de la base $\mathcal{B}$ qui contient x, aussi D est-il contenu dans une réunion dénombrable d'ouverts dénombrables.

- F <u>est fermé car</u> D <u>est ouvert</u>. Si x n'est pas dans F, il existe un voisinage $v(x)$ dénombrable : tous les points de $v(x)$ ont la même propriété et donc $v(x)$ est dans D qui est donc ouvert.

---

[1] Les centres des boules B_n forment une suite de Cauchy.

• F est sans point isolé. Soit x dans F : tout $v(x)$ est indénombrable et $v(x) \cap D$ est dénombrable, aussi $v(x) \cap F = v(x) - v(x) \cap D$ est indénombrable, x n'est pas isolé.

Conséquence. Si E n'est pas dénombrable, il contient un fermé sans point isolé non dénombrable.

4) Tout espace polonais non dénombrable contient Cantor

Rappelons qu'un espace *polonais* est un espace métrique complet séparable.

Nous avons établi qu'un espace complet sans point isolé contient une partie homéomorphe à $\mathcal{C}$.
Supposons maintenant que (F,d) est un polonais *non dénombrable*, alors d'après **3)**, $F = G + D$, avec G fermé sans point isolé et D dénombrable. Comme F n'est pas dénombrable, G est non vide ; comme G est fermé, c'est un métrique complet sans point isolé qui contient $\mathcal{C}$, aussi $\mathcal{C}$ se plonge-t-il dans F.

5) Tout espace polonais P non dénombrable a la puissance du continu

D'après **4)**, P a au moins la puissance du continu. Or, tout espace métrique séparable se plonge dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (on pourra consulter http://www.daniel-saada.eu/Notes/Le_Theoreme_d_Urysohn.pdf). Comme $[0,1]^{\mathbb{N}}$ a la puissance du continu, P a au plus la puissance du continu. Il en résulte que P a exactement la puissance du continu.

6) Sur tout polonais P non dénombrable existe une mesure diffuse μ non nulle

On sait que P contient une partie K homéomorphe à $\mathcal{C}$. Sur $\mathcal{C}$ existe une probabilité diffuse p (**mon ouvrage, chapitre 15**). Si f est l'homéomorphie de K sur $\mathcal{C}$, on construit sur K une probabilité diffuse q en posant $q(B) = p\left(f(B)\right)$ pour tout borélien B de K.
En posant $\mu(B) = q(B \cap K)$ pour tout borélien B de P, on obtient sur P une mesure diffuse positive non nulle.

Remarque. Si P est dénombrable, il n'existe pas de mesure diffuse sur P.