NOTE 23 - REPRÉSENTATION INTÉGRALE D'UNE NORME DU PLAN

www.daniel-saada.eu

Dans toute cette note, N désigne une norme du plan R^2, B la boule unité fermée pour N et S la sphère unité.
B et S sont compactes, B étant de plus convexe ; comme N est continue, il existe m et $M > 0$ tels que

$$m\sqrt{x^2+y^2} \le N(x,y) \le M\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \in R^2.$$

Une représentation paramétrique de S est $\left(x/N(x,y), y/N(x,y)\right)$.

On désignera par N_2, N_1, N_∞ les normes usuelles sur R^2 définies par

$N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $N_1(x,y) = |x|+|y|$, $N_\infty(x,y) = \max(|x|,|y|)$.

Enfin, on notera $<u,v>$ le produit scalaire dans R^2.

1) Le convexe dual C de B

Le convexe dual de B est l'ensemble C du plan défini par $C = \{(x,y) : ux+vy \le 1 \textit{ pour tout } (u,v) \in B\}$.

On vérifiera sans peine que C est aussi $\{(x,y) : ux+vy \le 1 \textit{ pour tout } (u,v) \in S\}$; comme B est symétrique par rapport à $O = (0,0)$, on a encore $C = \{(x,y) : |ux+vy| \le 1 \textit{ pour tout } (u,v) \in S \text{ ou } B\}$.

Exemples. $C_2 = B_2$, $C_1 = B_\infty$, $C_\infty = B_1$.

a) *propriétés de* C

C contient évidemment l'origine O et est, comme B, symétrique par rapport à O.

C **est convexe** :

$u\left(\lambda x+(1-\lambda)z\right)+v\left(\lambda y+(1-\lambda)t\right) = \lambda(ux+vy)+(1-\lambda)(uz+vt) \le 1$ quand $\lambda \in [0,1]$ et $(x,y),(z,t) \in C$.

C **est compact :**

− C est fermé car les inégalités $ux_n + vy_n \le 1$ se conservent par passage à la limite.

− C est borné

Soit (x,y) dans C. On choisit $v = 0$ et $u = 1/N(1,0)$, alors $N(u,v) = 1$ et donc $|ux+vy| \le 1$, d'où $|x| \le N(1,0)$; de même, $|y|$ est majoré par $N(0,1)$, donc $x^2+y^2 \le 2M^2$ et C est borné.

Remarque. Si on prend $(u,v) = \left(x/N(x,y), y/N(x,y)\right)$, $N(u,v) = 1$ et donc $ux+vy = k(x^2+y^2) \le 1$, ce qui donne $x^2+y^2 \le N(x,y)$ sur C.

C **contient l'origine dans son intérieur** : $B_2(0,m) \subset C$ car

$$(ux+vy)^2 \le (x^2+y^2)(u^2+v^2) \le m^2(u^2+v^2) \le m^2\,\frac{N^2(u,v)}{m^2}$$

donc si $N(u,v) \le 1$, alors $|ux+vy| \le 1$ et donc $(x,y) \in C$.

b) *la dualité entre* B *et* C

B *est le convexe dual de* C **:** $B = \{(u,v) : ux+vy \le 1 \textit{ pour tout } (x,y) \in C\}$

Il suffit de prouver l'inclusion $D = \{(u,v) : ux + vy \le 1 \; pour \; tout \; (x,y) \in C\} \subset B$, on le fait par contraposée.

Si $(u,v) \notin B$, on peut séparer (u,v) de B par une droite D ; D ne contenant pas l'origine, une de ses équations cartésiennes est $ax + by = 1$, B se trouvant dans le demi-plan $ax + by \le 1$ tandis que $au + bv > 1$.

Par définition, $(a,b) \in C$, et donc $(u,v) \notin D$.

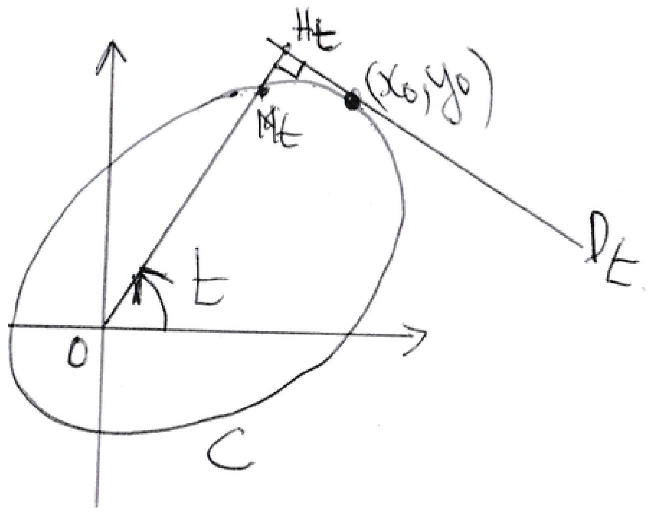
2) La fonction support h de C

Posons, pour $t \in R$, $h(t) = \max\limits_{(x,y)\in C} (x\cos t + y\sin t)$: à t fixé, la fonction $(x,y) \mapsto x\cos t + y\sin t$ est continue sur R^2 ; sur le compact C, elle atteint donc son maximum, ce qui justifie l'existence de h, appelée fonction support du convexe compact C. h est de période π car O est centre de symétrie de C ; comme $O \in C$, $h \ge 0$ sur R.

Par compacité, il existe (x_0, y_0) dans C et évidemment sur sa frontière, tel que $h(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t$.

Soit $D(t)$ la droite d'équation $x\cos t + y\sin t - h(t) = 0$: $(x_0, y_0) \in C \cap D(t)$ et pour tout $(x,y) \in C$, $x\cos t + y\sin t \le h(t)$. De plus, $D(t)$ est orthogonale à $(\cos t, \sin t)$ et $d\left(O, D(t)\right) = h(t)$.

Résumons par un dessin, où $r(t) = OM_t$, $h(t) = OH_t$, $D_t \perp OM_t$:



Prouvons maintenant que $h(t) = N(e^{it})$ **pour chaque** t**.**

Introduisons $(u,v) = (\cos t, \sin t) / N(e^{it})$: $N(u,v) = 1$, alors, si $(x,y) \in C$

$$ux + vy = (x\cos t + y\sin t) / N(e^{it}) \le 1$$

et donc $x\cos t + y\sin t \le N(e^{it})$ pour tout $(x,y) \in C$, d'où $h(t) \le N(e^{it})$.

Prouvons maintenant $N(e^{it}) \le h(t)$.

Pour tout (x,y) de C, $x\dfrac{\cos t}{h(t)} + y\dfrac{\sin t}{h(t)} \le 1$, donc $\left(\dfrac{\cos t}{h(t)}, \dfrac{\sin t}{h(t)}\right) \in B$ et $\dfrac{N(e^{it})}{h(t)} \le 1$.

On en déduit déjà que h est **continue** sur R comme composé de deux applications continues.

Exemples. $h_2 = 1$, $h_1(t) = |\cos t| + |\sin t|$, $h_\infty(t) = \max\left(|\cos t|, |\sin t|\right)$.

3) Équation polaire de S

Soit K un convexe compact du plan $\mathbb{R}^2$ ayant O dans son intérieur. On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$.

Pour t réel on définit $r(\mathrm{t}) = max\left\{r > 0 : re^{it} \in K\right\}$.

Il a été démontré dans http://www.daniel-saada.eu/fichiers/29-Convexes_compacts_du_plan.pdf que :

a) La fonction r est définie et *continue* (**§ 1**)

b) r est dérivable à gauche et à droite *en tout point* (**§ 2**)

c) si r est de classe C^2, $1/r + (1/r)'' \geq 0$ (**§ 8**)

La boule unité fermée B est un convexe compact ayant O dans son intérieur : il est facile de vérifier que $r(t) = 1/N(e^{it})$ et donc $r = 1/h$.

4) h'_d et h'_g existent partout, h'_d est continue à droite, h'_g est continue à gauche.

L'existence des dérivées à droite et à gauche pour h est une conséquence de $h = 1/r$.

Montrons maintenant les continuité unilatérales de h'_d et h'_g.

Pour ce faire, on va introduire la fonction $n(t) = N(1,t)$[1] : la fonction n étant convexe sur R, elle possède en tout t une dérivée à droite et une dérivée à gauche, la dérivée à droite étant continue à droite, la dérivée à gauche étant continue à gauche[2].

Sur l'intervalle ouvert $]-\pi/2, \pi/2[$, $h(t) = N(e^{it}) = \cos t \times N(1, \tan t)$ et donc $h = \cos \times (n \circ \tan)$.

On conclut avec $h' = -\sin \times (n \circ \tan) + \cos \times (n' \circ \tan) \times (1 + \tan^2)$.

Comme h est de période π, il nous faut montrer les deux continuités soit en $t = \pi/2$ soit en $t = -\pi/2$.

En faisant une rotation des axes, on montrerait les deux continuités sur $]\pi/4, \pi + \pi/4[- 3\pi/4$, ce qui achève la démonstration.

Conséquence : r'_d est continue à droite, r'_g est continue à gauche ; on complète ainsi les résultats du **3)**.

5) Une formule intégrale pour la norme N quand h est C^2 : $N(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} |x\sin t - t\cos t| \left(h(t) + h''(t)\right) dt$.

a) on sait alors que $\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)'' = h + h'' \geq 0$; on posera $k = h + h''$, k est donc une fonction continue positive et de période π. En résolvant l'équation différentielle $h + h'' = k$, on aboutit à

$$h(t) = A\sin t + B\cos t + \sin t.\int_0^t k(x)\cos x dx - \cos t.\int_0^t k(x)\sin x dx \text{, où } B = h(0).$$

b) $h'(t) = A\cos t - B\sin t + \cos t.\int_0^t k(x)\cos x dx + \sin t.\int_0^t k(x)\sin x dx = A\cos t - B\sin t + \int_0^t k(x)\cos(t-x) dx$.

c) $N(e^{it}) - N(1,0) = \int_0^t h'(u) du = A\sin t + B\cos t - B + \int_0^t \left(\int_0^u k(x)\cos(u-x) dx\right) du$.

Comme $B = N(1,0)$, $N(e^{it}) = A\sin t + B\cos t + \int_0^t \sin(t-x) k(x) dx$.

[1] Je dois cette idée à Clément de Seguins Pazzis.

[2] On pourra consulter Bourbaki, ou plus rapidement http://www.daniel-saada.eu/fichiers/28-Derivees-a-droite-et-a-gauche.pdf

Mais $N(e^{i(t+\pi)})=N(e^{it})=-A\sin t-B\cos t+\int_0^{t+\pi}\sin(t+\pi-x)k(x)dx$, d'où

$2N(e^{it})=\int_0^t\sin(t-x)k(x)dx+\int_0^{t+\pi}\sin(t+\pi-x)k(x)dx=\int_0^t\sin(t-x)k(x)dx-\int_0^{t+\pi}\sin(t-x)k(x)dx$

et $-2N(e^{it})=\int_t^0\sin(t-x)k(x)dx+\int_0^{\pi}\sin(t-x)k(x)dx+\int_{\pi}^{t+\pi}\sin(t-x)k(x)dx$.

d) Le changement de variable $x\leftarrow x-\pi$ et la périodicité de k donnent:

$\int_{\pi}^{t+\pi}\sin(t-x)k(x)dx=-\int_0^t\sin(t-x)k(x)dx$ et donc $-2N(e^{it})=-2\int_0^t\sin(t-x)k(x)dx+\int_0^{\pi}\sin(t-x)k(x)dx$.

Quand $0\le t\le\pi$:

$\int_0^{\pi}|\sin(t-x)|k(x)dx=\int_0^t\sin(t-x)k(x)dx+\int_t^{\pi}\sin(x-t)k(x)dx=2\int_0^t\sin(t-x)k(x)dx+\int_0^{\pi}\sin(x-t)k(x)dx$

et donc $N(e^{it})=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}|\sin(t-x)|k(x)dx$.

Pour $t\in[\pi,2\pi]$, $N(e^{it})=N(e^{i(t-\pi)})=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}|\sin(t-\pi-x)|k(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}|\sin(t-x)|k(x)dx$, et donc,

pour tout t : $\boxed{N(e^{it})=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}|\sin(t-x)|k(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}|\cos t.sinx-\sin t.\cos x|k(x)dx}$.

Par homogénéité, pour tout $(x,y)\in R^2$:

$$\boxed{N(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}|x\sin u-y\cos u|k(u)du=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}|x\sin u-y\cos u|\left(h(u)+h''(u)\right)du}.$$

On a aussi $N(x,y)=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}|x\cos v+y\sin v|k(v-\pi/2)dv$. Soit m la mesure de probabilité sur $[0,2\pi]$ définie par $dm=k(v-\pi/2)dv$:

$$N(x,y)=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}|x\cos v+y\sin v|dm(v).$$

Soit μ la mesure positive sur le cercle définie par $\mu(A)=m\left(f^{-1}(A)\right)$ où f est $t\mapsto e^{it}$: on a alors $\int_S g\,d\mu=\int_{[0,2\pi]}g(e^{it})dm(t)$. On peut alors affirmer que si $u=(x,y)$ et $w=(\cos v,\sin v)$, alors

$$\boxed{N(u)=\frac{1}{4}\int_S|<u,w>|d\mu(w)}.$$

Exemple. Pour la norme N_2 : $h=1$, $dm=dx$, $d\mu=dt$ et donc $\int_S|<u,v>|d\mu(v)=\int_0^{2\pi}\|u\|.|\cos t|dt=4\|u|$.

6) Cas général

On ne suppose plus h deux fois dérivable. Les affirmations qui suivent sont issues d'un bel article de GÉRARD LETAC, *Mesures sur le cercle et convexes du plan*, article accessible à

http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1983__76_1_35_0 .

a) La condition de convexité $\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{r}\right)''=h+h''\ge 0$ devient $h'(t)+\int_0^t h$ croissante quand h' existe partout, ce qui est bien compréhensible ; dans le cas où h' n'existe pas, elle devient : $t\mapsto h'_d(t)+\int_0^t h$ est croissante.

b) Posons $s_d(t)=h'_d(t)+\int_0^t h$: la fonction s_d étant continue à droite **(4)** et croissante, elle définit une mesure positive m sur $[0,2\pi]$ au moyen de :

i) $m(]a,b])=s_d(b)-s_d(a)$ **ii)** $m([a,b])=s_d(b)-s_d(a\_)$

iii) $m(]a,b[)=s_d(b\_)-s_d(a)$ **iv)** $m([a,b[)=s_d(b\_)-s_d(a\_)$

pour tous réels $a\le b$, $s_d(x\_)$ désignant la limite à gauche de s_d en x.

(Si besoin, consulter http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/amaury/LM365/polyLM365.pdf, page 11.)

On démontre alors que $\boxed{N(x,y)=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}|x\cos v+y\sin v|\,dm(v)}$.

c) Cette mesure m définit une mesure μ sur le cercle par $\mu(A)=m\left(f^{-1}(A)\right)$ où $f:t\mapsto e^{it}$:

$$\boxed{N(u)=\frac{1}{4}\int_S|<u,w>|\,d\mu(w)}.$$

Exemple. Pour la norme N_1, $h(t)=|\cos t|+|\sin t|$, laquelle vérifie :

$$h+h"=0 \text{ sauf en } 0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}, \text{ points en lesquels } h'_d-h'_g=+2.$$

Le calcul donne $\int_0^{2\pi}h=8$, $m([0,2\pi[)=8, m(0)=m(\pi/2)=m(\pi)=m(3\pi/2)=2$; m est donc discrète.

Si on pose $f(v)=|x\cos v+y\sin v|$, alors on retrouve

$$N_1(x,y)=\frac{1}{4}\int_{[0,2\pi[}f(v)dm(v)=\frac{2f(0)+2f(\pi/2)+2f(\pi)+2f(3\pi/2)}{4}=|x|+|y|.$$

7) Une application : l'inégalité quadrilatérale.

Soit N une norme sur un espace vectoriel réel E : l'inégalité

$$N(x+y)+N(y+z)+N(x+z)\le N(x)+N(y)+N(z)+N(x+y+z)$$

est appelée inégalité quadrilatérale.

a) *L'inégalité quadrilatérale est vrai quand* $(E,N)=(R,|x|)$

Laissé au lecteur, qui pourra consulter http://www.bloiseau.lycee-berthelot.fr/IMG/pdf/D04-2.pdf .

b) *L'inégalité quadrilatérale est vrai pour toute norme quand* $\dim E=2$.

En effet, puisqu'il existe une mesure <u>positive</u> finie sur le cercle telle que $N(x)=\frac{1}{4}\int_S|<x,w>|\,d\mu(w)$,

il suffit de vérifier que pour tout w

$$|<x+y,w>|+|<z+y,w>|+|<x+z,w>|\le|<x,w>|+|<y,w>|+|<z,w>|+|<x+y+z,w>| ;$$

or cette inégalité n'est autre que **a)** appliqué aux réels $<x,w>$, $<y,w>$, $<z,w>$.

c) *L'inégalité quadrilatérale est fausse dans* (R^3,N_∞)

Il suffit de trouver un contre-exemple, Maple le fait pour nous :

> A:=vector([rand(19)()-9,rand(19)()-9,rand(19)()-9]);

$A := [2, 9, -2]$

```
> B:=vector([rand(19)()-9,rand(19)()-9,rand(19)()-9]);
```

$B := [-7, 7, 7]$

```
> C:=vector([rand(19)()-9,rand(19)()-9,rand(19)()-9]);
```

$C := [-7, -5, -5]$

```
> E:=evalm(A+B);F:=evalm(B+C);G:=evalm(A+C);H:=evalm(A+C+B);
```

$E := [-5, 16, 5]$

$F := [-14, 2, 2]$

$G := [-5, 4, -7]$

$H := [-12, 11, 0]$

```
> N:=X->max(abs(X[1]),abs(X[2]),abs(X[3]));
```

$N := X \to \max(|X_1|, |X_2|, |X_3|)$

```
> N(A)+N(B)+N(C)+N(H);
```

35

```
> N(E)+N(F)+N(G);
```

37

On en déduit que N_∞ dans R^3 n'a pas de représentation intégrale du type $\int_S |< x, w >| \, d\mu(w)$, où S est la sphère unité de R^3 et μ une mesure de probabilité sur S.

d) *L'inégalité quadrilatérale est vraie dans tout espace euclidien*.
La norme euclidienne a une représentation intégrale en toute dimension : $N_2(u) = \int_S |< u, v >| \, d\mu(v)$, où S est la sphère unité de R^n (http://www.daniel-saada.eu/Notes/22-Inegalites-euclidiennes.pdf, **§ 4**).
Il en résulte que l'inégalité quadrilatérale est vraie pour les euclidiens.