# NOTE 22 - INÉGALITÉS EUCLIDIENNES

www.daniel-saada.eu

**Source :** http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?4,870482,page=1

On rappelle qu'un espace euclidien est un espace vectoriel (réel ici) de dimension finie muni d'un produit scalaire $<u,v>$, la norme de $u$ étant $\| u \| = \sqrt{<u,u>}$.

**1) Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont $n$ vecteurs d'un espace normé : $\sum\limits_{1 \le i,j \le n} \| x_i - x_j \| \le 2 \sum\limits_{1 \le i,j \le n} \| x_i + x_j \|$.**

**Démonstration.**

Pour tout $k$ allant de $1$ à $n$, $\| x_i - x_j \| \le \| x_i + x_k \| + \| x_k + x_j \|$ ; on somme sur $(i,j,k)$ :
$\sum\limits_{i,j,k} \| x_i - x_j \| \le \sum\limits_{i,j,k} \| x_i + x_k \| + \sum\limits_{i,j,k} \| x_k + x_j \|$, d'où $n \sum\limits_{i,j} \| x_i - x_j \| \le n \sum\limits_{i,k} \| x_i + x_k \| + n \sum\limits_{j,k} \| x_k + x_j \|$ et donc
$\sum\limits_{1 \le i,j \le n} \| x_i - x_j \| \le 2 \sum\limits_{1 \le i,j \le n} \| x_i + x_j \|$.

**2) Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont $n$ réels : $\sum\limits_{1 \le i,j \le n} | x_i - x_j | \le \sum\limits_{1 \le i,j \le n} | x_i + x_j |$.**

**Démonstration.**

**a)** $| x_i + x_j | - | x_i - x_j | = 2 \min\left( | x_i |, | x_j | \right) \times \begin{cases} 1 \text{ si } x_i x_j \ge 0 \\ -1 \text{ si } x_i x_j \le 0 \end{cases}$ comme on le vérifie en distinguant les cas.

**b)** Pour $t$ réel, on introduit les ensembles d'indices $I_t = \{ i : x_i \ge t \}$ et $J_t = \{ i : x_i < -t \}$ ; d'après **a)** :
$$\sum_{i,j} \left( | x_i + x_j | - | x_i - x_j | \right) = 2 \sum_{i,j \in I_0} \min\left( | x_i |, | x_j | \right) + 2 \sum_{i,j \in J_0} \min\left( | x_i |, | x_j | \right) - 4 \sum_{i \in I_0, j \in J_0} \min\left( | x_i |, | x_j | \right).$$

**c)** $\min\left( | x_i |, | x_j | \right) = \int_0^{+\infty} 1_{t < |x_i|} \times 1_{t < |x_j|} \, dt$ comme on le vérifie facilement.

D'autre part, $\sum\limits_i 1_{t \le x_i} = card(I_t)$, noté $|I_t|$, et $\sum\limits_i 1_{t > -x_i} = card(J_t)$, noté $|J_t|$.

**d)** $\sum\limits_{i,j \in I_0} \min\left( | x_i |, | x_j | \right) = \sum\limits_{i,j \in I_0} \int_0^{+\infty} 1_{t < |x_i|} \times 1_{t < |x_j|} \, dt = \int_0^{+\infty} \sum\limits_{i,j \in I_0} \left( 1_{t < |x_i|} \times 1_{t < |x_j|} \right) dt$

Or, $\sum\limits_{i,j \in I_0} \left( 1_{t < |x_i|} \times 1_{t < |x_j|} \right) = |I_t| \times |I_t|$ **parce que $t$ est positif**, d'où $\sum\limits_{i,j \in I_0} \min\left( | x_i |, | x_j | \right) = \int_0^{+\infty} |I_t|^2 \, dt$.

De même, $\sum\limits_{i,j \in J_0} \min\left( | x_i |, | x_j | \right) = \int_0^{+\infty} |J_t|^2 \, dt$ et $\sum\limits_{i \in I_0, j \in J_0} \min\left( | x_i |, | x_j | \right) = \int_0^{+\infty} |I_t| |J_t| \, dt$ ; on remarquera que $|I_t|$ est nul si $t > \max(x_i)$ et $|J_t|$ est nul si $t > \max(-x_i)$.

On a donc $\frac{1}{2} \sum\limits_{i,j} \left( | x_i + x_j | - | x_i - x_j | \right) = \int_0^{+\infty} \left( | I_t | - | J_t | \right)^2 dt \ge 0$.

L'égalité a lieu si et seulement si $I_t = J_t$ pour tout $t$, ce qui signifie que la distribution des $x_i$ est symétrique par rapport à 0 .

**Conséquence :** $\sum_{1\le i,j\le n} |x_i + x_j| \ge n \sum_{1\le i\le n} |x_i|$.

On part de $|x_i| \le \dfrac{|x_i + x_j| + |x_i - x_j|}{2}$ pour tout $j$ et on somme sur les couples $(i,j)$ :

$$\sum_{i,j} |x_i| \le \sum_{i,j}\left(\frac{|x_i + x_j| + |x_i - x_j|}{2}\right), \text{ d'où } n\sum_{i} |x_i| \le \sum_{i,j} |x_i + x_j|.$$

Comme on a aussi $\dfrac{1}{n^2}\sum_{1\le i,j\le n} |x_i + x_j| \ge \dfrac{1}{n}\sum_{1\le i\le n} |x_i|$, on peut énoncer :

*la moyenne arithmétique des* $|x_i + x_j|$ *dépasse toujours la moyenne arithmétique des* $|x_i|$.

**3) Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi et d'espérance finie :**

$$E(|X - Y|) \le E(|X + Y|).$$

**a)** $|X + Y| - |X - Y| = 2\min(|X|,|Y|) \times signe(XY)$

**b)** Posons $X_+ = \max(0, X)$, $X_- = \max(0, -X)$, $Y_+ = \max(0, Y)$, $Y_- = \max(0, -Y)$ [1] : $X_\pm$ et $Y_\pm$ sont positives, d'espérances finies, et forment quatre couples de variables indépendantes.

**c)** On a $\dfrac{1}{2}(|X + Y| - |X - Y|) = \min(X_+, Y_+) + \min(X_-, Y_-) - \min(X_+, Y_-) - \min(X_-, Y_+)$ : on s'en assure en distinguant les cas.

**d)** D'abord

$$\frac{1}{2}E(|X + Y| - |X - Y|) = E(\min(X_+, Y_+)) + E(\min(X_-, Y_-)) - E(\min(X_-, Y_+)) - E(\min(X_+, Y_-)).$$

Pour toute variable aléatoire $Z$ *positive*, $E(Z) = \int_0^{+\infty} P(Z > t)dt$ et donc

$$E(\min(X_+, Y_+)) = \int_0^{+\infty} P(\min(X_+, Y_+) > t)dt = \int_0^{+\infty} P(X_+ > t)P(Y_+ > t)dt \text{ par indépendance}$$

Or $X_+ = X$ ou $0$, donc $X_+ > t = X > T$ pour $t \ge 0$ ; de même $Y_+ > t = Y > t$, d'ou

$$E(\min(X_+, Y_+)) = \int_0^{+\infty} P(X > t)P(Y > t)dt.$$

On opère ainsi pour les trois autres espérances, et on arrive à

$$E(|X + Y| - |X - Y|) = 2\int_0^{+\infty} (P(X > t) - P(X < -t))(P(Y > t) - P(Y < -t))dt \ge 0.$$

**e)** Comme $X$ et $Y$ ont même loi :

$$E(|X + Y| - |X - Y|) = 2\int_0^{+\infty} (P(X > t) - P(X < -t))^2 dt \ge 0$$

ce qui termine la démonstration.

---

[1] Il faut comprendre, par exemple, $X_+(\omega) = \max(0, X(\omega))$.

**Conséquences.**

**f)** $E(|X|) \le \dfrac{E(|X-Y|)+E(|X+Y|)}{2} \le E(|X+Y|)$.

**g)** Soit $X$ et $Y$ indépendantes et de même loi sur $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ : $P(X = x_i) = P(Y = x_i) = p_i$ ; alors,

$E|X+Y| = \sum_{i,j} |x_i + x_j| p_i p_j$ dépasse $E|X-Y| = \sum_{i,j} |x_i - x_j| p_i p_j$ ce qui élargit **2)**.

**4)** Dans $R^n$ euclidien, $\|u\| = C_n \int_S |<u,v>| dp(v)$ où $S$ est la sphère unité de $R^n$, $p$ la mesure uniforme sur $S$, $C_n$ une constante positive ne dépendant que de la dimension.

Pour la définition de $p$, sa construction et son unicité, on pourra consulter

http://www.daniel-saada.eu/Notes/13-Lois-uniformes-sur-la-sphere.pdf

**Exemple**. En dimension 2, $\int_S |<u,v>| dp(v) = \int_0^{2\pi} \|u\|.|\cos t| \dfrac{dt}{2\pi} = \dfrac{2}{\pi}\|u\|$ et donc $C_2 = \pi/2$.

On rappelle que $\lambda(B) = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$, $\lambda$ désignant la mesure de Lebesgue sur $R^n$.

On utilise $\int_{B(0,1)} h\, d\lambda = n\lambda(B) \int_{]0,+1[\times S} h(tx) t^{n-1} dt\, dp(x)$, où $B = B(0,1)$, vraie pour toute $h$ intégrable :

http://www.daniel-saada.eu/fichiers/24-Densites_d_un_couple.pdf, paragraphe **2 c)**.

Soit $u$ non nul et $h(v) = |<u,v>|$ :

$$\int_{B(0,1)} |<u,v>| d\lambda(v) = n\lambda(B) \int_{]0,+1[\times S} |<u,x>| t^n dt\, dp(x) = \frac{n}{n+1} \lambda(B) \int_S |<u,x>| dp(x)$$

Il existe une base orthonormée $\left(\dfrac{u}{\|u\|}, e_2, ..., e_n\right)$ : si $v \in B = B(0,1)$, $v = x_1 \dfrac{u}{\|u\|} + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$ avec $\sum_1^n x_i^2 < 1$

et $|<u,v>| = |x_1|.\|u\|$ et donc

$$\int_{B(0,1)} |<u,v>| d\lambda(v) = \|u\| \int_{x_1^2+...+x_n^2<1} |x_1| dx_1 ... dx_n .$$

On a donc bien $\|u\| = C_n \int_S |<u,v>| dp(v)$, avec $C_n = \dfrac{n\lambda(B)}{(n+1)\int_{x_1^2+...+x_n^2<1} |x_1| dx_1 ... dx_n}$.

Pour $n = 2$, on vérifie que $C_2 = \pi/2$.

Prouvons que $C_n = \sqrt{\pi} \dfrac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}$ : avec Fubini,

$$J_n = \int_{x_1^2+...+x_n^2<1} |x_1| dx_1 ... dx_n = \int_{-1}^1 |x_1| \left( \int_{x_2^2+...+x_n^2<\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 ... dx_n \right) dx_1 = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma(n/2+1/2)} \int_O^1 x\left(1-x^2\right)^{(n-1)/2} dx$$

$$J_n = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma(n/2+1/2)} \times \frac{1}{n+1} \text{ et } C_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)} \times \frac{\Gamma(n/2+1/2)}{2\pi^{(n-1)/2}} = \frac{n\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2+1/2)}{2\Gamma(1+n/2)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2+1/2)}{\Gamma(n/2)}$$

car $\dfrac{n}{2}\Gamma(n/2) = \Gamma(1+n/2)$.

*Remarque de Gérard Letac*. On peut prouver $f : u \mapsto \int_S |< u,v >| \, dp(v)$ est une constante $C$ sur $S$ ; comme $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ si $\lambda \geq 0$, il vient $f(u) = \| u \| f(u/\| u \|) = C \| u \|$.

Prouvons que $f$ est constante sur $S$. Fixons $a \in S$ : pour tout $u$ de $S$ il existe $O$ orthogonale telle que $u = O(a)$.
On a alors $f(u) = f(O(a)) = \int_S |< O(a),v >| \, dp(v) = \int_S |< a, O^t(v) >| \, dp(v)$, d'où $f(u) = f(a)$ en vertu de la formule du changement de variable $\int_{O^{-1}(A)} g \, dp = \int_A g \circ O^{-1} \, |\det O^{-1}| dp$ appliqué à $g(v) = |< a,v >|$ et des relations $O^t = O^{-1}$, $O(S) = S$ et $\det(O) = \pm 1$.

**5) Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont $n$ vecteurs d'un espace euclidien : $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \| x_i - x_j \| \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} \| x_i + x_j \|$.**

En effet, $\| x_i + x_j \| - \| x_i - x_j \| = C_n \int_S \left( |< x_i + x_j, v >| - |< x_i - x_j, v >| \right) dp(v)$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \| x_i + x_j \| - \sum_{1 \leq i,j \leq n} \| x_i - x_j \| = C_n \int_S \left( \sum_{i,j} \left( |< x_i + x_j, v >| - |< x_i - x_j, v >| \right) \right) dp(v)$$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \| x_i + x_j \| - \sum_{1 \leq i,j \leq n} \| x_i - x_j \| = C_n \int_S \left( \sum_{i,j} \left( |< x_i, v > + < x_j, v >| - |< x_i, v > - < x_j, v >| \right) \right) dp(v)$$

intégrale positive en vertu de **2)**.

**6) Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires à valeurs dans un espace euclidien, indépendantes, de même loi et d'espérance finie : $E(\| X - Y \|) \leq E(\| X + Y \|)$.**

On sait que $\| X(\omega) + Y(\omega) \| = C_n \int_S |< X(\omega) + Y(\omega), s >| \, dp(s)$

Il en résulte que $E(\| X + Y \|) = \int_\Omega \left( C_n \int_S |< X(\omega) + Y(\omega), s >| \, dp(s) \right) dP(\omega)$. Il vient alors :

$E(\| X + Y \|) = C_n \int_S \left( \int_\Omega |< X(\omega) + Y(\omega), s >| dP(\omega) \right) dp(s)$,

$E(\| X + Y \|) = C_n \int_S E(|< X + Y, s >|) \, dp(s)$,

$E(\| X + Y \| - \| X - Y \|) = C_n \int_S \left[ E(|< X + Y, s >|) - E(|< X - Y, s >|) \right] dp(s)$.

Or $|< X + Y, s >| - |< X - Y, s >| = |< X, s > + < Y, s >| - |< X, s > - < Y, s >|$
donc $E(|< X + Y, s >|) - E(|< X - Y, s >|) \geq 0$ pour tout $s$, donc $E(\| X + Y \|) \geq E(\| X - Y \|)$.

**7) Si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires réelles, indépendantes et d'espérance finie, si $X'$ et $Y'$ sont des copies indépendantes (respectivement) de $X$ et $Y$, alors $E|X - Y| \geq \frac{1}{2} E|X - X'| + \frac{1}{2} E|Y - Y'|$.**

On utilise $|a - b| = \int_R \left( 1_{a<t<b} + 1_{b<t<a} \right) dt$, aussi $|X(\omega) - Y(\omega)| = \int_R \left( 1_{X(\omega)<t<Y(\omega)} + 1_{Y(\omega)<t<X(\omega)} \right) dt$ et donc

$$E|X - Y| = \int_R E\left( 1_{X(\omega)<t<Y(\omega)} + 1_{Y(\omega)<t<X(\omega)} \right) dt \ .$$

Or $E(1_A)=P(A)$ et donc $E\left(1_{X(\omega)<t<Y(\omega)}\right)=P\left((X<t)\cap(Y>t)\right)$ et $E\left(1_{Y(\omega)<t<X(\omega)}\right)=P\left((X>t)\cap(Y<t)\right)$.

Comme $X$ et $Y$ sont indépendantes : $E|X-Y|=\int_R\left(P(X<t)P(Y>t)+P(X>t)P(Y<t)\right)dt$ .

Puisque $X'$ est une copie indépendante de $X$ : $E|X-X'|=2\int_R P(X<t)P(X>t)dt$ .

De même, $E|Y-Y'|=2\int_R P(Y<t)P(Y>t)dt$ , et donc

$$E|X-Y|-\frac{1}{2}E|X-X'|-\frac{1}{2}E|Y-Y'|=2\int_R\left(P(X<t)-P(Y<t)\right)^2dt\geq 0$$

**Conséquence**. En faisant $Y=-X'$, on obtient $E|X+X'|\geq\frac{1}{2}E|X-X'|+\frac{1}{2}E|X'+Y'|$ ; comme $X'+Y'$ a même loi que $X+Y=X-X'$, on retrouve $E|X+X'|\geq E|X-X'|$ pour deux lois variables aléatoires $X$ et $X'$ indépendantes et de même loi.

**8) Si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires à valeurs dans un espace euclidien, indépendantes et d'espérance finie et si $X'$ et $Y'$ sont des copies indépendantes (respectivement) de $X$ et $Y$, alors**

$$E\|X-Y\|\geq\frac{1}{2}E\|X-X'\|+\frac{1}{2}E\|Y-Y'\|.$$

Nous savons que $E\|X-X'\|=C_n\int_S E\left(|<X-X',s>|\right)dp(s)$, $E\|Y-Y'\|=C_n\int_S E\left(|<Y-Y',s>|\right)dp(s)$, $E\|X-Y\|=C_n\int_S E\left(|<X-Y,s>|\right)dp(s)$. Pour tout $s$, $<X',s>$ est une copie indépendante de $<X,s>$ et $<Y',s>$ est une copie indépendante de $<Y,s>$. D'après **7)**, pour tout $s\in S$

$E|<X,s>-<Y,s>|\geq\frac{1}{2}E|<X,s>-<X',s>|+\frac{1}{2}E|<Y,s>-<Y',s>|$.

On en déduit donc $E\|X-Y\|\geq\frac{1}{2}E\|X-X'\|+\frac{1}{2}E\|Y-Y'\|$.

**Application géométrique.**

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles finis de points de $R^n$ de cardinaux respectifs $p=|\mathcal{A}|$ et $q=|\mathcal{B}|$ :

$$\mathcal{A}=\{A_1,A_2,\ldots,A_p\},\mathcal{B}=\{B_1,B_2,\ldots,B_q\}.$$

Il existe $X$ et $X'$ uniformes et indépendantes sur $\left\{\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\ldots,\overrightarrow{OA_p}\right\}$ et il existe $Y$, $Y'$ uniformes et indépendantes sur $\left\{\overrightarrow{OB_1},\overrightarrow{OB_2},\ldots,\overrightarrow{OB_q}\right\}$. Naturellement, $E\|X-X'\|=\frac{1}{p^2}\sum_{i,j}A_iA_j$, $E\|Y-Y'\|=\frac{1}{q^2}\sum_{i,j}B_iB_j$ et $E\|X-Y\|=\frac{1}{pq}\sum_{i,j}A_iB_j$. D'où l'inégalité géométrique entre distances euclidiennes :

$$\boxed{\sum_{i,j}\frac{A_iB_j}{|\mathcal{A}||\mathcal{B}|}\geq\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{A_iA_j}{|\mathcal{A}|^2}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{B_iB_j}{|\mathcal{B}|^2}}.$$