NOTE 21 - FONCTIONS DE DARBOUX TOTALEMENT DISCONTINUES

www.daniel-saada.eu

Toutes les fonctions considérées dans cette note vont de R dans R.

Une fonction de Darboux est une fonction (de R dans R) qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires :

si y est entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c entre a et b tel que $y = f(c)$.

Il revient au même de dire que l'image par f de tout intervalle de R est un intervalle.

Les fonctions continues sont des fonctions de Darboux, mais la réciproque est fausse comme le montra Gaston Darboux en 1875 (**[1]**).

Le but de cette note est de construire des fonction de Darboux n'ayant aucun point de continuité.

1) Continuité et discontinuités des fonctions de Darboux

Soit f une fonction de Darboux.

a) f est continue sur R si et seulement si $f^{-1}(x)$ est fermé pour tout réel x.

On se donne $\varepsilon > 0$: $f^{-1}\left(f(x)-\varepsilon\right) \cup f^{-1}\left(f(x)+\varepsilon\right)$ est un fermé F ne contenant pas x

il existe donc $\eta > 0$ tel que l'intervalle $J =]x-\eta, x+\eta[$ ne rencontre pas F

f(J) est un intervalle contenant f(x) et qui ne contient ni $f(x)-\varepsilon$ ni $f(x)+\varepsilon$: il en résulte que $f(J) \subset]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[$ et donc f continue en x.

Source : http://books.google.fr/books?id=cU8A_Z3ezOUC&pg=PA46#v=onepage&q&f=false

b) nature des discontinuités d'une fonction de Darboux

Si f est discontinue en x, il n'existe aucune limite en x ni finie ni infinie :

• si $\lim_{x} f = +\infty$ par exemple, alors il existe $\eta > 0$ tel que $f(t) > f(x)+1$ si $0 < |t-x| < \eta$ et alors l'image par f de $J =]x-\eta, x+\eta[$ n'est pas un intervalle.

• si $\lim_{x} f = l$ et $l \neq f(x)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \notin]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ et donc $\eta > 0$ tel que $0 < |t-x| < \eta$ implique $\left|f(x)-l\right| < \varepsilon$; comme précédemment, l'image par f de $]x-\eta, x+\eta[$ n'est pas un intervalle.

Exemple. $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ avec $f(0)=0$: $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ est discontinue en 0 et n'a ni limite finie ni limite infinie en ce point.

Remarque. Ce résultat s'étend sans peine aux limites à droite et à gauche.

2) Le théorème de Darboux (1875)

Toute dérivée, même non continue, est une fonction de Darboux.

On trouvera deux démonstrations dans **[1]**.

La fonction partie entière, qui n'est pas de Darboux, est donc sans primitive.

On sait qu'une dérivée a une infinité de points de continuité (**[2]**, § 14.10, pages 239-240).

Il en résulte qu'une fonction de Darboux sans aucun point de continuité n'est pas une fonction dérivée.

3) Il existe des fonctions de Darboux totalement discontinues

R est un espace vectoriel sur le corps Q des rationnels. Soit $\mathcal{B}=(b_i)_{i\in I}$ une base du Q-espace vectoriel R : tout x de R s'écrit de façon unique $\sum_J q_j b_j$, où J est une partie finie de I et les q_j sont rationnels.

Une application linéaire f de R dans R vérifie

(i) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tous les réels x et y

(ii) $f(qx)=qf(x)$ pour tout réel x et tout rationnel q.

On démontre facilement que **(i)** implique **(ii)** : les endomorphismes du Q-espace vectoriel R sont donc simplement les applications additives.

$\mathcal{B}$ étant infinie (sinon R serait dénombrable), il existe une surjection φ de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}$ non injective.

En effet, $\mathcal{B}$ contient une partie dénombrable $D=(d_n)_{n\in N}$. Posons $\varphi(d_0)=d_0$ et $\varphi(d_n)=d_{n-1}$ pour $n\geq 1$.

Sur $\mathcal{B}-D$ (éventuellement vide[1]), φ est égale à l'identité. φ est surjective et $\varphi(d_0)=\varphi(d_1)$.

On prolonge φ à R en f par : si $x=\sum_J q_j b_j$, $f(x)=\sum_J q_j\varphi(b_j)$; f est linéaire, surjective et non injective.

Montrons que f transforme tout intervalle I non réduit à un point en R.

Puisque f n'est pas injective, son noyau contient un réel non nul x_0 et donc la droite vectorielle $x_0.Q$.

Comme Q est dense dans R, il en est de même de $x_0.Q$ et donc du noyau de f.

Soit y un réel et $]a,b[$ un intervalle ouvert contenu dans I : y peut s'écrire $f(x)$ car g est surjective.

Comme $Ker\,f$ est dense, il existe $t\in Ker\,f$ tel que $a-x<t<b-x$.

Le réel $x+t$ a pour image y et est dans l'intervalle]a, b[. Nous avons donc démontré : l'image par f de tout intervalle non réduit à un point est R tout entier et f est donc de Darboux.

f n'a aucun point de continuité, car en tout x, f n'est bornée sur aucun voisinage de x.

BIBLIOGRAPHIE

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Darboux_(analyse)

[2] DANIEL SAADA, *Tribus et probabilités sur les univers infinis*, consultable partiellement sur http://books.google.fr/books?id=kq69nXaoV-AC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false

[1] On démontre que $card\,\mathcal{B}>card\,\mathbb{N}$, R a donc pour dimension son cardinal, lire http://www.normalesup.org/~sage/Cours/LibDimInf.pdf