NOTE 20 – UN EXERCICE SUR LES LOIS UNIFORMES

OLIVIER GARET ET GÉRARD LETAC

www.daniel-saada.eu

Sur http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?12,836884, est posée la question suivante :

soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires uniformes et indépendantes, à valeurs dans $(0,1)$ et $Z_n = \dfrac{\sum_1^n X_i^2}{\sum_1^n X_i}$;

on prouve assez facilement que $E(Z_n) \to 2/3$, a-t-on $E(1/Z_n) \to 3/2$.

1) $E(Z_n) \to 2/3$.

D'après la loi forte des grands nombres, $\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2$ converge presque sûrement (ps) vers $E(X_1^2) = 1/3$ et $\frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ converge ps vers $E(X_1) = 1/2$. Donc Z_n converge ps vers $2/3$.

Comme $0 \leq Z_n \leq 1$, $E(Z_n) \to 2/3$ par convergence dominée.

En revanche, comme $1/Z_n$ n'est pas bornée, on ne peut affirmer directement que $E(1/Z_n) \to 3/2$.

2) $E(1/Z_n) \to 3/2$.

La démonstration de Gérard Letac

En posant $S_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2 = \frac{1}{T_n}$, $\frac{1}{Z_n} = T_n \times \frac{\sum_1^n X_i}{n}$ et donc $E(1/Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i T_n) = E(X_1 T_n)$ car les X_i ont même loi.

a) $E(X_1 T_n) = \int_0^{+\infty} E(X_1 e^{-uS_n})du$.

C'est une conséquence de la formule $E\left(\frac{X}{Y}\right) = \int_0^{+\infty} E(X.e^{-tY})dt$, Y étant positive.

En effet, comme $E[X.e^{-tY}] = \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=0}^{+\infty} xe^{-ty} f(x,y)dxdy$ (f est la densité de (X,Y)) :

$$\int_0^{+\infty} E[X.e^{-tY}]dt = \int_{t=0}^{+\infty}\left(\int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=0}^{+\infty} xe^{-ty} f(x,y)dxdy\right)dt$$

Or, $\int_0^{+\infty} e^{-ty}dt = 1/y$, d'où $\int_0^{+\infty} E[X.e^{-tY}]dt = \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=0}^{+\infty} \frac{x}{y} f(x,y)dxdy = E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

b) Les fonctions auxiliaires $L(u) = \int_0^1 e^{-ux^2}dx$ et $k(u) = \ln\left(L(u)\right), u \geq 0$.

• L est positive, décroissante, à dérivée continue ; de plus, en posant $y = x\sqrt{u}$:

$$L(u) \underset{+\infty}{\sim} \alpha/\sqrt{u} \quad \text{avec } \alpha = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Il en résulte que $L(u)^n$ est intégrable sur R^+ dès que $n \geq 3$.

• k est négative, décroissante, à dérivée continue sur R^+ ; montrons qu'elle est convexe.

Comme k est continue, il suffit de vérifier que $k\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{k(u)+k(v)}{2}$.

Or $k\left(\dfrac{u+v}{2}\right)=\ln\left(\int_0^1 e^{-ux^2/2}.e^{-vx^2/2}dx\right)$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 e^{-ux^2/2}.e^{-vx^2/2}dx \le \sqrt{\int_0^1 e^{-ux^2}dx}\sqrt{\int_0^1 e^{-vx^2}dx}$$

et donc $k\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\le \dfrac{k(u)+k(v)}{2}$.

On en déduit que $t\mapsto \dfrac{k(t)}{t}$ est croissante car sa dérivée est $\dfrac{1}{t^2}\int_0^t xk''(x)dx$ (dériver le numérateur de la dérivée).

c) Pour $n\ge 3$, $E(X_1T_n)=\int_0^{+\infty}\dfrac{1-e^{-u/n}}{2u/n}L(u/n)^{n-1}du$.

Comme $X_1e^{-uS_n}=X_1e^{-uX_i^2/n}\prod_2^n e^{-uX_i^2/n}$, par indépendance on obtient

$$E(X_1e^{-uS_n})=E(X_1e^{-uX_1^2/n})E\left(\prod_2^n e^{-uX_i^2/n}\right)=E(X_1e^{-uX_1^2/n})E(e^{-uX_2^2/n})^{n-1}.$$

$E(X_1e^{-uX_1^2/n})=\int_0^1 xe^{-ux^2/n}dx$ car X_1 est uniforme sur (0,1), et donc $E(X_1e^{-uX_1^2/n})=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1-e^{-u/n}}{u/n}$.

$E(X_1e^{-uX_2^2/n})=\int_0^1 e^{-ux^2/n}dx=L(u/n)$, aussi $E(e^{-uX_2^2/n})^{n-1}=L(u/n)^{n-1}$.

A partir du rang 3 seulement, $\dfrac{1-e^{-u/n}}{2u/n}L(u/n)^{n-1}$ est intégrable sur R^+.

d) $\dfrac{1-e^{-u/n}}{2u/n}L(u/n)^{n-1}\to\dfrac{1}{2}e^{-u/3}$.

D'abord, $\dfrac{1-e^{-u/n}}{2u/n}\to\dfrac{1}{2}$.

Ensuite, comme L est continue en 0 et $L(0)=1$, $L(u/n)^{n-1}$ a même limite, si elle existe, que $L(u/n)^n$.

Pour u fixé ≥ 0, $L(u/n)^n=\exp\left(nk(u/n)\right)=\exp\left(u\dfrac{k(u/n)}{u/n}\right)$ donc $L(u/n)^n$ est décroissante, sa limite étant

$\exp\left(uk'(0)\right)=e^{-u/3}$ car $k'(0)=L'(0)=-\int_0^1 x^2dx=-1/3$.

e) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1-e^{-u/n}}{2u/n}L(u/n)^{n-1}du\to 3/2$ **par convergence dominée.**

On sait que $\dfrac{1-e^{-u/n}}{2u/n}\times L(u/n)^{n-1}\to\dfrac{1}{2}\times e^{-u/3}$, reste à dominer $\dfrac{1-e^{-u/n}}{2u/n}\times L(u/n)^{n-1}$ par une fonction intégrable.

Comme $X_1e^{-uX_1^2/n}\le e^{-uX_1^2/n}$, $E\left(X_1e^{-uX_1^2/n}\right)\le E\left(e^{-uX_1^2/n}\right)=L(u/n)$ et donc $\dfrac{1-e^{-u/n}}{2u/n}L(u/n)^{n-1}\le L(u/n)^n$.

Or $L(u/n)^n\le L(u/3)^3$ par décroissance et $L(u/3)^3$ est intégrable sur R^+. On a donc bien

$$E(1/Z_n)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u/n}}{2u/n}L(u/n)^{n-1}du\to\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-u/3}du=\frac{3}{2}.$$

La démonstration d'Olivier Garet

Puisque $Z_n \geq 0$, $E(1/Z_n) = \int_0^{+\infty} P(1/Z_n > t)dt$; comme $Z_n \underset{ps}{\rightarrow} 2/3$,

$$P(1/Z_n > t) = P(Z_n < 1/t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t < 3/2 \\ 0 \text{ si } t > 3/2 \end{cases}$$

Donc, $P(1/Z_n > t) \underset{pp}{\rightarrow} 1_{]0,3/2[}(t)$, avec $\int_0^{+\infty} 1_{]0,3/2[}(t)\,dt = 3/2$.

Reste à majorer $P(1/Z_n > t)$ par une fonction intégrable sur R^+.

a) L'inégalité de Markov donne $P(1/Z_n > t) \leq \dfrac{E(1/Z_n{}^2)}{t^2}$, donc $P(1/Z_n > t) \leq \min\left(1, \dfrac{E(1/Z_n{}^2)}{t^2}\right)$:

il suffit donc de montrer que $E(1/Z_n{}^2)$ est majorée. En majorant chaque X_k par 1 :

$$\frac{1}{Z_n{}^2} = \frac{(X_1 + \ldots + X_n)^2}{(X_1{}^2 + \ldots + X_n{}^2)^2} \leq \frac{n^2}{(X_1{}^2 + \ldots + X_n{}^2)^2} \text{ et } E\left(\frac{1}{Z_n{}^2}\right) \leq n^2 E\left(\frac{1}{(X_1{}^2 + \ldots + X_n{}^2)^2}\right).$$

b) On pose $N_n = card\{k : 1 \leq k \leq n \text{ et } X_k \geq 1/2\}$: pour $n \geq N$, $\dfrac{1}{(X_1{}^2 + \ldots + X_n{}^2)^2} \leq \dfrac{1}{(X_1{}^2 + \ldots + X_N{}^2)^2}$

et si $N_n > n/3$, alors $X_1{}^2 + \ldots + X_n{}^2 \geq n/12$ et $\dfrac{1}{(X_1{}^2 + \ldots + X_n{}^2)^2} \leq \dfrac{144}{n^2}$, ce qu'on peut condenser en :

$$\frac{1}{(X_1{}^2 + \ldots + X_n{}^2)^2} \leq \frac{1}{(X_1{}^2 + \ldots + X_N{}^2)^2} . 1_{\{N_n \leq n/3\}} + \frac{144}{n^2}.$$

En passant à l'espérance et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$E\left(\frac{1}{(X_1{}^2 + \ldots + X_n{}^2)^2}\right) \leq \sqrt{E\left(\frac{1}{(X_1{}^2 + \ldots + X_N{}^2)^4}\right)} . \sqrt{P(N_n \leq n/3)} + \frac{144}{n^2}.$$

c) Pour $n \geq 9$, $E\left(\dfrac{1}{(X_1{}^2 + \ldots + X_n{}^2)^4}\right)$ est finie.

En effet, $E\left(\dfrac{1}{(X_1{}^2 + \ldots + X_n{}^2)^4}\right) = \displaystyle\int_{[0,1]^n} \frac{dx_1 \ldots . dx_n}{(x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2)^4}$ car les X_k sont uniformes, indépendantes, à valeurs dans (0,1). Posons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\sqrt{x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2} = \| x \|$:

$$E\left(\frac{1}{(X_1{}^2 + \ldots + X_n{}^2)^4}\right) = \int_{[0,1]^n} \frac{dx}{\| x \|^8} \leq \int_{[-1,1]^n} \frac{dx}{\| x \|^8} \text{ [1]}$$

Comme $[-1,1]^n \subset B(0, \sqrt{n}) \subset B(0, \sqrt{n})$, $\displaystyle\int_{[0,1]^n} \frac{dx}{\| x \|^8} \leq \frac{1}{2^n} \int_{B(0,n)} \frac{dx}{\| x \|^8}$, et

$\displaystyle\int_{B(0,n)} \frac{dx}{\| x \|^8} = nV \int_0^n x^{-8} x^{n-1} dx$, où V désigne le volume de la boule unité de R^n, qui est bien finie dès que $n \geq 8$.

Pour cette importante formule intégrale, on pourra consulter :

- Olivier Garet, http://www.iecn.u-nancy.fr/~garet/livre/extrait.pdf, Th. 4.12.9, page 89 ;

[1] En fait, par symétrie, $\displaystyle\int_{[0,1]^n} \frac{dx}{\| x \|^8} = \frac{1}{2^n} \int_{[-1,1]^n} \frac{dx}{\| x \|^8}$.

• Daniel Revuz, *Mesure et intégration*, Hermann, p. 185 ;

•http://www.daniel-saada.eu/fichiers/24-Densites_d_un_couple.pdf , § 2.

d) $nP(N_n \le n/3)$ **est majoré.**

Comme $P(X_k \ge 1/2) = P(X_k < 1/2)$ pour tout k, N_n est la somme de n lois de Bernoulli B_i indépendantes de paramètre $1/2$. Pour $t > 0$, on peut écrire $P(N_n \le n/3) = P(e^{-tN_n} \ge e^{-nt/3}) \le \dfrac{E(e^{-tN_n})}{e^{-nt/3}}$ (Markov encore).

Par indépendance, $E(e^{-tN_n}) = \prod_1^n E(e^{-tB_i}) = \left(E(e^{-tB_1})\right)^n = \left(\dfrac{1+e^{-t}}{2}\right)^n$ et donc

$P(N_n \le n/3) \le e^{nt/3}\left(\dfrac{1+e^{-t}}{2}\right)^n \le \left(\dfrac{e^{t/3}+e^{-2t/3}}{2}\right)^n$. Choisissons t tel que $e^{t/3} = 3/2$: alors $P(N_n \le n/3) \le \left(\dfrac{35}{36}\right)^n$ et donc $nP(N_n \le n/3)$ est majoré.

Conclusion : pour $n \ge 9$, on a

$$E\left(\frac{1}{Z_n^{\ 2}}\right) \le n^2 E\left(\frac{1}{(X_1^{\ 2}+\ldots+X_n^{\ 2})^2}\right) \le \sqrt{E\left(\frac{1}{(X_1^{\ 2}+\ldots+X_9^{\ 2})^4}\right)}.\sqrt{nP(N_n \le n/3)} + 144$$

ce qui montre que $E(1/Z_n^{\ 2})$ est majorée.

****