LE THÉORÈME DE PLONGEMENT D'URYSOHN :

tout métrique séparable est homéomorphe à une partie du cube de Hilbert

www.daniel-saada.eu

Le cube de Hilbert, noté H, est l'espace $[0,1]^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à valeurs dans $[0,1]$, muni de la topologie produit. On démontre que H est compact et que sa topologie est définie par la distance

$$D(a,b)=\sum_0^\infty \frac{|a_n-b_n|}{2^n}$$, où $a=(a_n)$ et $b=(b_n)$ sont deux éléments de H.

Comme tout espace métrique compact, H est séparable et il en est ainsi de tous ses sous-ensembles (http://www.daniel-saada.eu/fichiers/14-variables_aleatoires_a_valeurs_dans_un_metrique.pdf, **§ 2**).
Nous prouvons : tout espace métrique séparable (E,d) est homéomorphe à un sous-ensemble du cube de Hilbert.

1) On vérifie que $D(x_n,x)\to 0$ équivaut à $x_n(m)\to x(m)$ pour tout m (ce qui est rassurant)

a) *Supposons* $D(x_n,x)\to 0$. Pour m fixé et $\varepsilon>0$ donné, $D(x_n,x)\le \varepsilon/2^m$ à partir d'un rang n_0, d'où $|x_n(m)-x(m)|\le\varepsilon$ pour $n\ge n_0$, ce qui prouve que $x_n(m)\to x(m)$.

b) *Supposons* $x_n(m)\to x(m)$ *pour tout* m. Coupons $D(x_n,x)=\sum_{m=0}^\infty \frac{|x_n(m)-x(m)|}{2^m}$ en $\sum_{m=0}^K \frac{|x_n(m)-x(m)|}{2^m}+\sum_{m=K+1}^\infty \frac{|x_n(m)-x(m)|}{2^m}$. Comme $\sum_{m=K+1}^\infty \frac{|x_n(m)-x(m)|}{2^m}\le \sum_{m=K+1}^\infty \frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^K}$, on choisit un entier K tel que $1/2^K\le\varepsilon$. Il existe alors n_0 tel que pour $n\ge n_0$ et $m=1,2,...,K$ on ait $|x_n(m)-x(m)|\le\varepsilon$.

On en déduit $D(x_n,x)\le\varepsilon\sum_0^K\frac{1}{2^m}+\varepsilon\le 3\varepsilon$, d'où $D(x_n,x)\to 0$.

2) Tout espace métrique est homéomorphe à un métrique borné de diamètre ≤ 1

Posons $\delta=d/(1+d)$: δ est encore une distance sur E. Toute boule ouverte pour d contient une boule ouverte pour δ et réciproquement. En effet :

- comme $\delta\le d$, $B_\delta(a;r)\subset B_d(a;r)$;
- $B_d(a;\frac{r}{1-r})\subset B_\delta(a;r)$ quand $r<1$ et $B_\delta(a;1)=E$.

Il en résulte que l'application identique de (E,d) dans (E,δ) est une homéomorphie.

3) Le plongement φ de (E,δ) dans H

Soit (e_n) une suite dense dans E [1] et φ l'application de E dans H définie par $\varphi(x)=\left(\delta(x,e_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) φ *est injective*. En effet, x étant la limite d'une sous-suite e_{n_i} des e_n, l'égalité $\varphi(x)=\varphi(y)$ entraîne que y est aussi la limite des e_{n_i}, d'où $x=y$.

---

[1] (e_n) est à la fois dense pour d et pour δ.

b) φ *est continue*. En effet, $D\left(\varphi(x),\varphi(y)\right) \leq \sum_0^\infty \delta(x,y)/2^n \leq 2\delta(x,y)$.

c) φ *est une homéomorphie de* (E,δ) *sur* $(\varphi(E),D)$. Pour prouver la continuité de φ^{-1} en $\varphi(x)$, on montre que si $\varphi(x_k)$ tend vers $\varphi(x)$ dans H alors $x_k \to x$ dans E. Par densité, il existe n tel que $\delta(x,e_n) \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ fixé. Pour cet entier n, $\lim_k \delta(x_k,e_n) = \delta(x,e_n)$ car on a supposé $\varphi(x_k) \to \varphi(x)$: aussi, $\delta(x_k,e_n) \leq \delta(x,e_n) + \varepsilon$ pour tout $k \geq k_0$. Comme $\delta(x_k,x) \leq \delta(x_k,e_n) + \delta(x,e_n)$, on a $\delta(x_k,x) \leq 2\delta(x,e_n) + \varepsilon \leq 3\varepsilon$, ce qui prouve la convergence de la suite (x_k) vers x.

Conclusion : par transitivité, (E,d) est homéomorphe à $(\varphi(E),D)$.

4) Deux exemples

Si (E,d) est compact, il est séparable et donc homéomorphe à $\varphi(E)$; par homéomorphie, $\varphi(E)$ est compacte, donc fermée dans H :

tout métrique compact est homéomorphe à un fermé de H.

Si (E,d) est complet séparable, on démontre que $\varphi(E)$ est un G_δ de H

tout métrique complet séparable est homéomorphe à un G_δ *de* H.

(On se rappelle que dans un espace métrique tout fermé est un G_δ).