18 - CONVERGENCE PONCTUELLE DES SÉRIES D'HERMITE

www.daniel-saada.eu

A) Les polynômes d'Hermite

Le n ième polynôme d'Hermite H_n est défini par $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2/2}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$.

On trouve facilement $H_0=1$, $H_1(x)=x$, $H_{n+1}(x)=xH_n(x)-nH_{n-1}(x)$ et on prouve que

$$\int_R H_nH_m\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx=0 \text{ quand } m\neq n \text{ et } \int_R H_n.H_n\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx=n!$$

Le degré de H_n est n et H_n est unitaire ; sa forme explicite est $H_n(x)=n!\sum_{j=0}^{n/2}\dfrac{(-1)^j x^{n-2j}}{2^j j!(n-2j)!}$.

On a aussi $H_n^{'}=nH_{n-1}$.

Soit p la probabilité définie par $dp=\dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx$: pour B borélien de R, $p(B)=\int_B dp=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}1_B(t)e^{-t^2/2}dt$.

Soit $E=L^2(p)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables réelles vérifiant $\int_R f^2dp<+\infty$: E est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f/g)=\int_R f.g\,dp$. La norme $\|f\|$ de f dans E est définie par

$$\|f\|^2=(f/f)=\int_R f^2\,dp=\int_R f^2\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \text{ ; par exemple, } \|H_n\|=\sqrt{n!}$$

Les égalités $\int_R H_nH_m dp=0$ quand $m\neq n$ et $\int_R H_n.H_n dp=n!$ montrent que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E et $(K_n=H_n/\sqrt{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ en est une famille orthonormée. Nous avons montré dans

http://www.daniel-saada.eu/Notes/17-Polynomes-d-Hermite.pdf

que $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E, donc pour toute f de $L^2(p)$, $f=\sum_0^\infty (f/K_n)K_n=\sum_0^\infty (f/H_n)\dfrac{H_n}{n!}$.

On se demande maintenant dans cette note à quelles conditions (suffisantes) **la série d'Hermite** $\sum_0^\infty (f/H_n)\dfrac{H_n(x)}{n!}$ a pour somme $f(x)$ pour tout réel x, c'est-à-dire à quelles conditions $S_Nf(x)=\sum_0^N (f/H_n)\dfrac{H_n(x)}{n!}\to f(x)$ quand N tend vers l'infini.

B) Convergence ponctuelle de la série d'Hermite (http://infty08.pagesperso-orange.fr/dudePolOrth.pdf)

1) Un exemple : pour tout $(x,t)\in R^2$, $e^{tx-t^2/2}=\sum_{n=0}^\infty t^nH_n(x)/n!$ ou $e^{tx}=\sum_{n=0}^\infty \dfrac{t^ne^{t^2/2}}{\sqrt{n!}}K_n(x)$.

On écrit $e^{tx-t^2/2}=\sum_0^\infty \dfrac{t^nx^n}{n!}.\sum_0^\infty\dfrac{(-1)^nt^{2n}}{2^nn!}$: ces deux séries convergent absolument et on vérifie sans mal que le coefficient de t^n est $\sum_{i+2j=n}\dfrac{x^i}{i!}\dfrac{(-1)^j}{2^jj!}$ est bien $H_n(x)/n!$ puisque $H_n(x)=n!\sum_{j=0}^{n/2}\dfrac{(-1)^jx^{n-2j}}{2^jj!(n-2j)!}$.

Pour retrouver rapidement cette formule, on écrit le développement en série de Taylor de $e^{-x^2/2}$:

$e^{-(x+t)^2/2}=e^{-x^2/2}+\sum_1^\infty\dfrac{t^n}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})=e^{-x^2/2}+e^{-x^2/2}\sum_1^\infty(-1)^n\dfrac{t^n}{n!}H_n(x)$, en supposant qu'il converge, d'où $e^{-(x-t)^2/2} = e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2}\sum_1^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)$ et donc $\sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x)/n! = e^{tx-t^2/2}$.

On en déduit que pour tous x et t, $\lim_n \frac{t^n}{n!}H_n(x) = 0$, ce qu'on justifiera ultérieurement.

2) Si $f \in E$ est de classe C^2 et si $\lim_{\pm\infty} x^n f(x)e^{-x^2/2} = 0$ pour tout n, f est la somme de sa série d'Hermite.

Remarquons que $\lim_{\pm\infty} x^n f(x)e^{-x^2/2} = 0$ équivaut à $\lim_{\pm\infty} x^n f(x)e^{-x^2/2} = \lim_{\pm\infty} x^n e^{-x^2/2}$ et donc que les conditions aux limites sont moins restrictives qu'il n'y paraît .

Posons $S_N f(x) = \sum_{n=0}^{N}(f/H_n)\frac{H_n(x)}{n!}$: nous montrons que $\lim_N S_N f(x) = f(x)$, et ceci pour tout réel x.

On se fixe donc un réel x.

Par définition, $(f/H_n)\frac{H_n(x)}{n!} = \int_R f(t)H_n(t)\frac{H_n(x)}{n!}dp(t)$ et donc $S_N f(x) = \int_R f(t)\sum_{n=0}^{N}\frac{H_n(t)H_n(x)}{n!}dp(t)$.

a) La formule de Christoffel-Darboux : $\sum_{n=0}^{n}\frac{H_i(t)H_i(x)}{i!} = \frac{1}{n!}\frac{H_{n+1}(t)H_n(x) - H_n(t)H_{n+1}(x)}{t-x}$.

Par récurrence sur n. Avec $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$, il vient

$$H_{n+1}(t)H_n(x) - H_n(t)H_{n+1}(x) = (t-x)H_n(t)H_n(x) + n\left(H_n(t)H_{n-1}(x) - H_{n-1}(t)H_n(x)\right),$$

$$H_{n+1}(t)H_n(x) - H_n(t)H_{n+1}(x) = (t-x)H_n(t)H_n(x) + n(n-1)!(t-x)\sum_{n=0}^{n-1}\frac{H_i(t)H_i(x)}{i!},$$

$$\frac{H_{n+1}(t)H_n(x) - H_n(t)H_{n+1}(x)}{n!(t-x)} = \frac{H_n(t)H_n(x)}{n!} + \sum_{n=0}^{n-1}\frac{H_i(t)H_i(x)}{i!}$$, c'est établi.

Bien entendu, quand $t = x$, $\sum_{n=0}^{n}\frac{H_i(x)H_i(x)}{i!} = \frac{1}{n!}\left(H_{n+1}^{'}(x)H_n(x) - H_n^{'}(x)H_{n+1}(x)\right)$.

b) La fonction g définie par $g(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ si $t \neq x$ et $g(x) = f'(x)$ est dans $E = L^2(p)$.

Preuve : g étant continue, soit M un majorant de $|g|$ sur $J = [x-1, x+1]$:

$$\int_R g^2 dp = \int_J g^2 dp + \int_{R-J} g^2 dp \leq 2M^2 + \int_R \left(f(t) - f(x)\right)^2 dp(t)$$

et donc $\int_R g^2 dp \leq 2M^2 + \int_R f^2 dp - 2f(x)\int_R f\,dp + f^2(x)$ et f est intégrable pour p car en vertu de <u>l'inégalité de Cauchy-Schwarz</u> : $\left(\int_R |f|\,dp\right)^2 \leq \int_R f^2\,dp$.

c) $\sqrt{n+1}(K_n/g) \to 0$

Comme pour toute fonction de E, $K_n/g \to 0$; il s'agit d'établir en outre que $K_n/g = o(\sqrt{n})$.

Pour simplifier l'exposition de la méthode, on se place en $x = 0$ et on suppose $f(0) = 0$, de sorte que $g(t) = f(t)/t$; f étant de classe C^2, g est à dérivée continue. Ensuite,

$K_n/f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K_n(x)e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)K_n(x)e^{-x^2/2}dx$ et on intègre par parties :

$$K_n/f = \left[K_n(x)g(x)e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(g'(x)K_n(x) + K_n^{'}(x)g(x)\right)e^{-x^2/2}dx.$$

Il reste $K_n / f = K_n / g' + K_n' / g$, mais $K_n' = \sqrt{n} K_{n-1}$ car $H_n' = nH_{n-1}$, donc

$$\sqrt{n+1}(K_n / g) = K_{n+1} / f - K_{n+1} / g' \to 0.$$

d) Une majoration de $K_n(x)$

D'après http://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials , il existe une constante C telle que pour tout n, $|K_n(x)| \le C e^{x^2/4}$ (*Cramer's inequality*).

La série de Taylor $e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2} \sum_1^\infty (-1)^n \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{-x^2/2} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^n}{\sqrt{n!}} K_n(x)$ converge donc absolument pour tout x. Pour un encadrement optimal de K_n, consulter http://arxiv.org/pdf/math/0401310.pdf .

e) $\lim_N S_N f(x) = f(x)$

Rappelons que $S_N f(x) = \int_R f(t) \sum_{n=0}^N \frac{H_n(t) H_n(x)}{n!} dp(t)$: avec $f = H_0$, il vient $\int_R \sum_{n=0}^N \frac{H_n(t) H_n(x)}{n!} dp(t) = 1$, et donc $S_N f(x) - f(x) = \int_R \left(f(t) - f(x)\right) \sum_{n=0}^N \frac{H_n(t) H_n(x)}{n!} dp(t)$. Avec la formule de **Christoffel-Darboux** :

$$S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{n!} \int_R \left(H_{n+1}(t) H_n(x) - H_n(t) H_{n+1}(x)\right) \frac{f(t) - f(x)}{t - x} dp(t)$$

d'où

$S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{n!}\left(H_n(x).(H_{n+1} / g) - H_{n+1}(x).(H_n / g)\right)$. Majorons :

$\left|S_n f(x) - f(x)\right| \le \frac{1}{n!}\left(|H_n(x)|.|H_{n+1} / g| + |H_{n+1}(x)|.|H_n / g|\right)$; comme $K_n = H_n / \sqrt{n!}$,

$\left|S_n f(x) - f(x)\right| \le \sqrt{n+1}\left(|K_n(x)|.|K_{n+1} / g| + |K_{n+1}(x)|.|K_n / g|\right)$.

On a vu que $\sqrt{n+1}(K_n / g) \to 0$ et on sait que les $K_n(x)$ sont bornés, aussi $\left|S_n f(x) - f(x)\right| \to 0$.

Exemples

- $f_t(x) = e^{tx}$ est indéfiniment dérivable et $\lim_{\pm\infty} x^n f_t(x) e^{-x^2/2} = 0$ pour tout n : pour tout réel t, f_t est la somme de sa série d'Hermite, ce qu'on avait démontré directement.
- La fonction de répartition d'une loi normale standard $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ est la somme de sa série d'Hermite car F est indéfiniment dérivable et bornée.

[[Entraine que $f\,/\,H_n$ existe pour tout n dès que $f \in L^1(p)$ car :

$f\,/\,H_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)H_n(x)e^{-x^2/2}dx$, Hn unitaire de degré n, $|\,x^n f(x)e^{-x^2/2}\,| \leq 1/x^2$ si $|\,x\,| \geq X$ **]]**

si $\sum_0^{\infty} |\,f\,/\,K_n\,| < +\infty$, alors $g(x) = \sum_0^{\infty} (f\,/\,K_n)K_n(x)$ existe pour tout x car $|\,K_n(x)\,| \leq Ce^{x^2/4}$.