NOTE 17 : LES POLYNÔMES D'HERMITE FORMENT UNE BASE HILBERTIENNE

www.daniel-saada.eu

Les polynômes d'Hermite

Le n ième polynôme d'Hermite H_n est défini par $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$.

On trouve facilement $H_0 = 1$, $H_1(x) = x$, $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$ et on prouve que

$$\int_R H_n H_m \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 0 \text{ quand } m \neq n \text{ et } \int_R H_n . H_n \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = n!$$

Comme le degré de H_n est n, $Vect(H_n) = R[X]$.

Soit p la probabilité définie par $dp = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$: pour B borélien de R, $p(B) = \int_B dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_B(t) e^{-t^2/2} dt$.

Soit $E = L^2(p)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables réelles vérifiant $\int_R f^2 dp < +\infty$: E est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f / g) = \int_R f.g\, dp$. La norme $\|f\|$ de f dans E est définie par

$$\|f\|^2 = (f / f) = \int_R f^2\, dp = \int_R f^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \text{ ; par exemple, } \|H_n\| = \sqrt{n!}$$

Quelque propriétés de $E = L^2(p)$:

- si $f \in L^2(p)$, alors $f \in L^1(p)$ car en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left(\int_R |f|\, dp\right)^2 \leq \int_R f^2\, dp$;
- $R[X] \subset L^2(p)$;
- les fonctions continues à support compact, qui sont toutes dans $L^2(p)$, sont denses pour la norme.

Les égalités $\int_R H_n H_m dp = 0$ quand $m \neq n$ et $\int_R H_n . H_n dp = n!$ montrent que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E et $(K_n = H_n / \sqrt{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ en est une famille orthonormée. **Montrons que c'est une base hilbertienne** en prouvant soit que $F = Vect(K_n) = R[X]$ est dense en norme, soit que $F^\perp = 0$.

La démonstration expéditive de Wikipedia : $F^\perp = 0$.

Soit f orthogonale à tous les x^n. La fonction de la variable complexe z, $F(z) = \int_R f(x) e^{zx - x^2/2} dx$, est alors identiquement nulle car $F(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} \int_R f(x) x^n e^{-x^2/2} dx = 0$. Traduisons $F(iy) = 0$: $\int_R f(x) e^{iyx - x^2/2} dx = 0$ pour tout réel y. Ainsi, la transformée de Fourier de $f(x)e^{-x^2/2}$ est nulle et on sait alors que $f(x)e^{-x^2/2} = 0$ presque partout. Source : http://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials.

Démonstration 2 : F **est dense.**

On va établir que pour toute f continue à support compact, il existe un polynôme T tel que

$$\| f - T \|^2 = \int_R (f - T)^2 dp \leq \varepsilon \text{, ou encore } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - T(x))^2 e^{-x^2/2} dx \leq \varepsilon$$

ce qui suffira, par densité des fonctions continues à support compact.

Ce résultat s'étendant aux fonctions continues sur R et ayant pour limite 0 aux deux infinis, ensemble noté $\mathcal{C}_0$, f désigne donc dans toute la suite une fonction de $\mathcal{C}_0$. Bien que personnelle, ma démonstration s'inspire de la composition d'Analyse de l'Agrégation externe 1991 (http://agreg.org/sujets/M92AD2E.PDF), laquelle reprend mot pour mot des énoncés de Jean Dieudonné contenus dans son ouvrage *Calcul infinitésimal* (Hermann, 1980), et du corrigé publié par la RMS n° 3 de novembre 1991.

Le point central de ce qui va suivre est le

Lemme. Si φ est continue sur R^+ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que

$$| f(x) - P(x)e^{-x} | \le \varepsilon \text{ sur } R^+.$$

Pour une démonstration, on se reportera aux documents précités.

En appliquant le lemme à la fonction $x \mapsto f(x/t)$, $t > 0$, il existe Q, dépendant de t, tel que

$$| f(x) - Q(x)e^{-tx} | \le \varepsilon \text{ sur } R^+.$$

En remplaçant $f(x)$ par $f(\sqrt{x})$, il vient $| f(x) - Q(x^2)e^{-tx^2} | \le \varepsilon$ sur R^+.

On va maintenant distinguer f paire de f impaire.

1) Quand f est paire, $| f(x) - Q(x^2)e^{-tx^2} | \le \varepsilon$ sur R.

Remplaçons f par la fonction paire $f(x)e^{-tx^2}$: il existe R tel que $| f(x) - R(x^2) | \le \varepsilon e^{tx^2}$ sur R.

On en déduit $(f(x) - R(x^2))^2 e^{-x^2/2} \le \varepsilon e^{(2t-0,5)x^2}$; en choisissant $t = 1/8$:

$$(f(x) - R(x^2))^2 e^{-x^2/2} \le \varepsilon e^{-x^2/4} \text{ sur } R \text{ et donc } \| f - R \|^2 \le \varepsilon^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/4} dx = \varepsilon^2 \sqrt{2}.$$

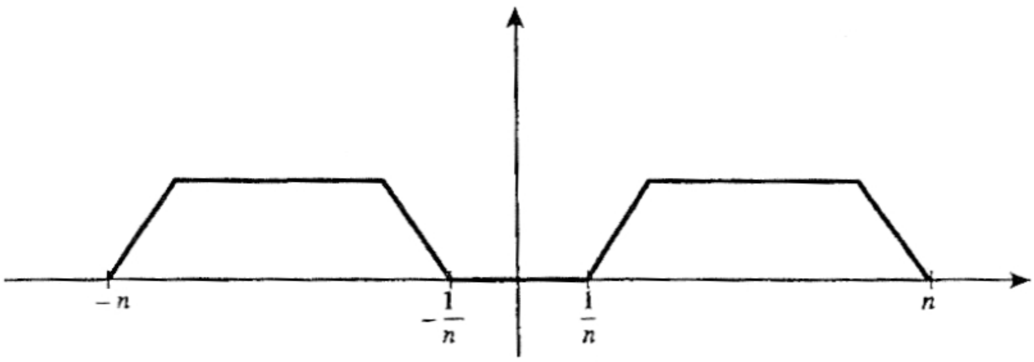
Toute fonction paire de $\mathcal{C}_0$ est dans l'adhérence en norme des polynômes.

2) Si f est impaire, on a toujours $| f(x) - Q(x^2)e^{-tx^2} | \le \varepsilon$ sur R^+.

a) Si f est nulle dans un voisinage de 0, on remplace $f(x)$ par $f(x)/x$ qui devient paire et demeure dans $\mathcal{C}_0$:

$$| f(x) - xQ(x^2)e^{-tx^2} | \le \varepsilon |x| \text{ sur } R.$$

b) Si f n'est pas identiquement nulle dans un voisinage de 0, on la multiplie par la fonction h_n dont le graphe est



(h_n est paire, affine par morceaux, et vaut 1 sur $\left[\frac{2}{n}, n - \frac{1}{n}\right]$)

La suite des fonctions $f.h_n$ converge uniformément vers f sur R : il existe donc n tel que $|f.h_n - f| \leq \varepsilon$ sur R .

Pour ce n , d'après **a)**, il existe un polynôme S tel que $|f(x)h_n(x) - xS(x^2)e^{-tx^2}| \leq \varepsilon |x|$ sur R et donc

$$|f(x) - xS(x^2)e^{-tx^2}| \leq \varepsilon + \varepsilon |x|.$$

c) Comme cette inégalité englobe celle de **a)**, on peut affirmer que pour **toute** fonction impaire f , il existe S tel que $|f(x) - xS(x^2)e^{-tx^2}| \leq \varepsilon + \varepsilon |x|$.En appliquant à la fonction impaire $f(x)e^{-tx^2}$: $|f(x) - xS(x^2)| \leq (\varepsilon + \varepsilon |x|)e^{tx^2}$.
Enfin, $(f(x) - xS(x^2))^2 e^{-x^2/2} \leq (\varepsilon + \varepsilon |x|)^2 e^{(2t-0,5)x^2}$; avec encore $t = 1/8$:

$$(f(x) - xS(x^2))^2 e^{-x^2/2} \leq \varepsilon^2 (1 + |x|)^2 e^{-x^2/4}.$$

D'où $\| f - xS(x^2) \|^2 \leq \varepsilon^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|)^2 e^{-x^2/4} dx = \varepsilon^2 (4 + 3\sqrt{\pi}) \sqrt{\frac{2}{\pi}} < 7,5\varepsilon^2$.

Toute fonction impaire de $\mathcal{C}_0$ est dans l'adhérence en norme des polynômes.

Par addition, pour toute $f \in \mathcal{C}_0$, $\| f - R(x) - xS(x^2) \| < 4\varepsilon$ et donc
toute fonction de $\mathcal{C}_0$ est dans l'adhérence en norme des polynômes.

En conclusion, toute f de $L^2(p)$ s'écrit $f = \sum_0^\infty (f / H_n) \frac{H_n}{n!}$ et $\| f \|^2 = \sum_0^\infty \frac{(f / H_n)^2}{n!}$.