NOTE 14 - MESURES À DENSITÉ INVARIANTES PAR LES ISOMÉTRIES LINÉAIRES DE R^n

www.daniel-saada.eu

Pour $n \geq 2$, on désigne par B la boule unité de R^n , S la sphère unité, λ la mesure de Lebesgue.
Si A est un borélien de S, on désigne par A_r l'ensemble des $t.x$ pour x dans A et t dans $[0,r]$.

On pose alors $\sigma(A) = \lambda(A_1)$: σ est une mesure sur S, de masse $\sigma(S) = \lambda(B) = \pi^{n/2} \int_0^{+\infty} t^{n/2} e^{-t} dt$.

$p = \sigma / \lambda(B)$ est donc une probabilité sur la sphère, qualifiée d'uniforme puisque $p(A) = aire(A) / aire(S)$.

On démontre [1] que pour toute h intégrable, $\int_{R^n} h\, d\lambda = n \int_{]0,+\infty[\times S} h(tx) t^{n-1} dt\, d\sigma(x)$ et plus généralement

$\int_{B(0,r)} h\, d\lambda = n \int_{]0,+r[\times S} h(tx) t^{n-1} dt\, d\sigma(x)$.

1) Une mesure m sur R^n ($n \geq 2$) est dite invariante par les isométries linéaires si $m(A) = m\big(O(A)\big)$ pour tout borélien A et tout endomorphisme orthogonal O de R^n.
Il est bien connu que λ, qui est une mesure élargie, est invariante par ces isométries [2].
En particulier, $\lambda(A_r) = r^n \lambda(A_1)$ car A_r est un homothétique de A_1.

Selon un schéma classique, l'invariance sur les boréliens s'étend aux fonctions numériques f $m-$intégrables :

$$\int_S (f \circ O)\, dm = \int_S f\, dm.$$

En effet, $m(A) = m\big(O(A)\big)$ s'écrit comme $\int_S (1_A \circ O^{-1})\, dm = \int_S 1_A\, dm$: on étend cette égalité par linéarité aux fonctions étagées, puis aux fonctions intégrables positives par le théorème de convergence monotone de Beppo-Levi, enfin aux fonctions intégrables de signe quelconque par la décomposition $f = f^+ - f^-$.

2) Un vecteur aléatoire X de R^n est dit radialement symétrique[3] si X et OX ont même loi pour toute matrice O orthogonale : $P(X \in A) = P(OX \in A)$ pour tout borélien A de R^n, ou encore, O étant bijective,

$$P\left(X^{-1}(A)\right) = P\left(X^{-1}(O(A))\right).$$

La probabilité $q(A) = P\left(X^{-1}(A)\right)$, définie sur les boréliens de R^n, est alors invariante par les isométries linéaires.
Un vecteur formé de lois normales $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes est radialement symétrique [4].
La somme deux vecteurs indépendants X et Y radialement symétriques est radialement symétrique car :
$O(X+Y) = OX + OY$, OX a même loi que X, OY a même loi que Y, OX et OY sont indépendantes.

3) Si X a une densité f (par rapport à la mesure de Lebesgue) et si $M \in GL_n(R)$, le vecteur MX a pour densité $f \circ M^{-1} |\det(M^{-1})|$ car $P(X \in A) = \int_B f\, d\lambda$, $P(MX \in A) = P\left(X \in M^{-1}(A)\right) = \int_{M^{-1}(A)} f\, d\lambda$ et la formule du changement de variable donne $\int_{M^{-1}(A)} f\, d\lambda = \int_A f \circ M^{-1} |\det M^{-1}| d\lambda$.

---

1 http://www.daniel-saada.eu/fichiers/24-Densites_d_un_couple.pdf, § 2
2 http://www.daniel-saada.eu/Notes/13-Lois-uniformes-sur-la-sphere.pdf
3 Néologisme issu de l'anglais.
4 http://www.daniel-saada.eu/Notes/13-Lois-uniformes-sur-la-sphere.pdf, § 3

4) Si X radialement symétrique a une densité f et si O est orthogonale, une densité de OX est $f\circ O^{-1}$ car $|\det(O^{-1})|=1$. Il en résulte que $f\circ O^{-1}=f$ presque partout, ou $f=f\circ O$, et ceci pour toute $O\in O_n(R)$.

Si f est continue, $f\circ O^{-1}=f$ partout car $f\circ O^{-1}$ est également continue ; on en déduit :

il existe une fonction g positive continue telle que $f(x)=g(\|x\|)$ *pour tout x de* R^n.

En effet, pour chaque x non nul il existe O tel que $O\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)=e_1=(1,0,...,0)$. On a alors $O(x)=\|x\|e_1$ puis $f(x)=f(O(x))=f(\|x\|e_1)=g(\|x\|)$; en posant $g(0)=f(0)$, g est évidemment continue comme f.

Le résultat subsiste presque intégralement (!) quand la densité f n'est pas continue :

il existe g *borélienne positive telle que* $f(x)=g(\|x\|)$ *presque partout* [5]

Preuve : soit Y indépendante de X, à densité φ continue et majorée par M, et radialement symétrique, par exemple un vecteur formé de lois normales $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes

On pose $X_n=X+Y/n$:

a) par indépendance, une densité de X_n est la convolée $(f*g_n)(x)=\int_{R^n}f(x-t)\varphi_n(t)dt=\int_{R^n}f(t)\varphi_n(x-t)dt$ où φ_n est la densité de Y/n, $\varphi_n(t)=n\varphi(nt)$.

b) pour tout n, $f*g_n$ est continue car si $\lim\limits_k x_k=x$, $\lim\limits_k f(t)\varphi_n(x_k-t)=f(t)\varphi_n(x-t)$ et $|f(t)\varphi_n(t-x)|\le Mf(t)$ qui est intégrable (théorème de convergence dominée).

c) $(f*\varphi_n)(x)=\int_{R^n}f(x-t)n\varphi(nt)dt=\int_{R^n}f(x-u/n)\varphi(u)du$ et donc

$(f*\varphi_n)(x)-f(x)=\int_{R^n}f(x-u/n)\varphi(u)du-f(x)\int_{R^n}\varphi(u)du$

et $|(f*\varphi_n)(x)-f(x)|\le\int_{R^n}|f(x-u/n)-f(x)|\varphi(u)du\le M\int_{R^n}|f(x-u/n)-f(x)|du$ qui tend vers 0 (classique) car f intégrable.

d) $X_n=X+Y/n$ est radialement symétrique (voir **2**) : $f*\varphi_n(x)=g_n(\|x\|)$, g_n tend vers une g telle que $f(x)=g(\|x\|)$, partout me semble-t-il.

5) $n\lambda(B)\int_0^{+\infty}g(r)r^{n-1}dr=1$.

On s'appuie sur la formule intégrale citée dans l'introduction : comme $\int_{R^n}f\,d\lambda=1$,

$$1=n\int_{]0,+\infty[\times S}f(tx)t^{n-1}dt\,d\sigma(x)=n\int_{]0,+\infty[\times S}g(t\|x\|)t^{n-1}dt\,d\sigma(x),$$

mais comme $x\in S$,

$$1=n\int_{]0,+\infty[\times S}g(t)t^{n-1}dt\,d\sigma(x)=n\int_{]0,+\infty[}g(t)t^{n-1}dt.\int_S d\sigma(x)=n\lambda(B)\int_{]0,+\infty[}g(t)t^{n-1}dt.$$

[5] Charles Suquet, http://math.univ-lille1.fr/~suquet/Polys/simul.pdf

6) Réciproques

• si une densité f est égale à $g\left(\| x \|\right)$, alors $f(Ox) = f(x)$; comme $P(X \in B) = \int_B f d\lambda$, le changement de variable $y = O(x)$ donne $P(OX \in B) = \int_{O^{-1}(B)} f(x)d\lambda = \int_{O^{-1}(B)} f(Rx)\,|\det(R)|\,d\lambda = \int_B f(x)d\lambda$.

X de densité f est donc radialement symétrique et $p(B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$ est invariante par $O_n(R)$.

• si g est borélienne de R dans R^+ et $n\lambda(B)\int_0^{+\infty} g(r)r^{n-1}dr = 1$, $f(x) = g\left(\| x \|\right)$ est une densité car

$$\int_{R^n} f\,d\lambda = n\int_{]0,+\infty[\times S} f(tx)t^{n-1}dt\,d\sigma(x) = n\int_{]0,+\infty[\times S} g(t\| x \|)t^{n-1}dt\,d\sigma(x) = n\lambda(B)\int_{]0,+\infty[} g(t)t^{n-1}dt = 1$$

et X est alors radialement symétrique.

7) Construction de probabilités invariantes par les isométries linéaires

Soit φ positive telle que $\int_0^{+\infty} \varphi(r)r^{n-1}dr < +\infty$, par exemple en imposant $\varphi(r) \underset{+\infty}{\sim} r^{-n-1}$. En posant

$g(r) = \dfrac{\varphi(r)}{n\lambda(B)\int_0^{+\infty} \varphi(r)r^{n-1}dr}$ et $f : x \in R^n \mapsto g\left(\| x \|\right)$, $A \mapsto \int_A f\,d\lambda$ est une probabilité sur les boréliens de R^n invariante par les isométries linéaires. Échappent à ce bestiaire :

– la mesure de Dirac en O, qui n'est pas à densité,
– la mesure de Lebesgue, qui n'est pas une mesure au sens strict.

8) Détermination de g quand X est radialement symétrique et à densité

Puisque X a une densité f, $p(\| X \| \le r) = p\left(X \in B(0,r)\right) = \int_{B'(0,r)} f$. On a dit que

$$\int_{B'(0,r)} f\,d\lambda = n\int_{]0,r]\times S} f(tx)t^{n-1}dt\,d\sigma(x) = n\int_0^r t^{n-1}\left(\int_S f(tx)d\sigma(x)\right)dt.$$

En dérivant par rapport à r, on prouve que $\| X \|$ a pour densité $h(r) = nr^{n-1}\int_S f(rx)d\sigma(x)$;

$$h(r) = nr^{n-1}\int_S f(rx)d\sigma(x) = nr^{n-1}\int_S g\left(r\| x \|\right)d\sigma(x) = nr^{n-1}g\left(r\right)\int_S d\sigma(x) = nr^{n-1}g\left(r\right)\lambda(B)$$

d'où $g\left(\| x \|\right) = \dfrac{h\left(\| x \|\right)}{n\lambda(B)\| x \|^{n-1}}$. On notera que $n\lambda(B)\| x \|^{n-1}$ est l'aire de la sphère de rayon $\| x \|$.

9) Si X radialement symétrique est à densité, $Y = \dfrac{X}{\| X \|}$ est uniforme sur la sphère.

Soit A un borélien de S, f une densité de X, $\Psi : x \mapsto x / \| x \|$:

$$P(Y \in A) = P(X \in \Psi^{-1}(A)) = \int_{\Psi^{-1}(A)} f\,d\lambda = n\int_{]0,+\infty]\times A} f(tx)t^{n-1}\,dtd\sigma(x) = n\int_{]0,+\infty]\times A} g(t)t^{n-1}\,dtd\sigma(x)$$

et donc $P(Y \in A) = n\sigma(A)\int_{]0,+\infty]} g(t)t^{n-1}\,dt = \sigma(A) / \lambda(B) = p(A)$.

10) $\| X \|$ et Y sont indépendantes.

Commençons par démontrer que $P(\| X \| \le r \text{ et } Y \in A) = P(\| X \| \le r).P(Y \in A)$ pour tout borélien A de S.

L'événement $\| X \| \leq r$ et $Y \in A$ est $X \in A_r$ et donc $P(\| X \| \leq r \text{ et } Y \in A) = P(X \in A_r)$. Ensuite :

$$P(X \in A_r) = \int_{A_r} f\, d\lambda = n\int_{[0,r]\times A} f(tx)t^{n-1}\, dt d\sigma(x) = n\int_{[0,r]\times A} g(t)t^{n-1}\, dt d\sigma(x) = \sigma(A)\int_0^r g(t)nt^{n-1}dt,$$

et $\sigma(A)\int_0^r g(t)nt^{n-1}dt = \sigma(A)\int_0^r \frac{h(t)}{\lambda(B)}dt = P(\| X \| \leq r).P(Y \in A)$ car h est une densité de $\| X \|$.

Par additivité, on prouve ensuite que $P(s \leq \| X \| \leq r \text{ et } Y \in A) = P(s \leq \| X \| \leq r).P(Y \in A)$.

Enfin, on raisonne sur l'ensemble $\left\{D \text{ boréliens de } R^+ : P(\| X \| \in D \text{ et } Y \in A) = P(\| X \| \in D).P(Y \in A)\right\}$:

cet ensemble contient les intervalles de R^+ qui sont stables par intersection et engendrent les boréliens de R^+ aussi a-t-on $P(\| X \| \in D \text{ et } Y \in A) = P(\| X \| \in D).P(Y \in A)$ pour tous A et D boréliens.