NOTE 13 - LOIS UNIFORMES SUR LA SPHÈRE

www.daniel-saada.eu

Comment observer *uniformément* la voûte céleste depuis un télescope lancé dans l'espace et supposé immobile ? Pour ce faire, il nous faut définir *la probabilité uniforme* sur une sphère de R^3 : nous prouvons son existence et son unicité, puis nous donnerons trois algorithmes de simulation de lois uniformes sur la sphère.

A) La probabilité uniforme p sur la sphère unité en dimension n

E est un espace euclidien réel de dimension n, λ la mesure de Lebesgue sur E : λ est l'unique mesure $\sigma-finie$ sur la tribu des boréliens de E invariante par translation et valant 1 sur $[0,1]^n$ (**[2]**, page 4). On désigne par B la boule unité de E et S sa sphère ; rappelons que $\lambda(B)$, le volume de B, vaut $\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}=\pi^{n/2}\int_0^{+\infty}t^{n/2}e^{-t}dt$ et que l'aire de S est $n\lambda(B)$.

1) La mesure de Lebesgue λ est invariante par les isométries de E

Plus généralement, on va montrer que, pour tout borélien A de E et u dans $GL(E)$, $\lambda\left(u(A)\right)=|\det u|\,\lambda(A)$ [1].
D'abord, $u(A)$ est un borélien : on sait que $f^{-1}(A)$ est un borélien dès que f est continue, on applique ce fait à la *fonction* u^{-1}, qui existe car u est bijectif et est continue puisque u est linéaire.

• à u fixé, $A\mapsto\lambda\left(u(A)\right)$ est une mesure invariante par translation et bornée sur $[0,1]^n$ donc proportionnelle à λ ; si $k(u)$ est la constante de proportionnalité, la fonction numérique k est >0 sur $GL(E)$ et multiplicative.

• si u est une involution, $k(u)=1$; si u est orthogonale, $k(u)=1$ car u est un produit d'au plus n réflexions (symétries orthogonales par rapport à un hyperplan).

• si u est diagonale (en identifiant u et sa matrice D dans la base canonique), $k(u)$ est la valeur absolue du produit des éléments diagonaux de D : $k(u)=|\det(u)|$. En effet, si A est le cube unité $[0,1]^n$, $k(u)=\lambda\left(u(A)\right)$ et $u(A)$ est un pavé dont les arêtes mesurent $|d_1|,...,|d_n|$.

• toute matrice inversible réelle est le produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique strictement positive (décomposition polaire). Matriciellement, on a donc $U=O.S$, $k(U)=k(O).k(S)=k(S)$ et $|\det U|=|\det S|$; or $S=PDP^{-1}$, $k(S)=k(D)=|\det D|=|\det S|$.

On trouvera une toute autre démonstration dans **[2]**, page 8.

2) La définition de p

Si A est un borélien de S et h une homothétie de rapport k, $\lambda\left(h(A)\right)=|k|^n\,\lambda(A)$ en vertu de **a)**.
Par conséquent, si A_r désigne, pour $r>0$, l'ensemble des $t.x$ pour x dans A et t dans $[0,r]$, $\lambda(A_r)=r^n\lambda(A_1)$ (A_r est un homothétique de A_1). On pose alors $\sigma(A)=\lambda(A_1)$:

---

[1] On suppose bien sûr $\lambda(A)$ finie.

σ est une mesure sur S, de masse $\sigma(S) = \lambda(B) = \pi^{n/2} \int_0^{+\infty} t^{n/2} e^{-t} dt$.

$p = \sigma / \lambda(B)$ est donc une probabilité sur la sphère, qualifiée d'uniforme puisque $p(A) = aire(A) / aire(S)$.

3) Une caractérisation de p

σ, comme p, sont invariantes par tout endomorphisme u orthogonal car pour tout borélien A de E :

$\lambda\left(u(A_1)\right) = |\det u| \lambda(A_1)$, $\det u = \pm 1$, et $u(A_1) = \left(u(A)\right)_1$ par homogénéité.

On démontre que p est la *seule* probabilité sur la sphère invariante par les endomorphismes orthogonaux.
On pourra par exemple consulter l'ouvrage de Hervé Queffélec et Claude Zuily, *Analyse pour l'Agrégation*, pages 214-217.

Démonstration

Soit q une probabilité sur S invariante par O_n : q est alors invariante par $G = SO_n$, le groupe des isométries linéaires directes. Nous allons prouver que $q = p$ sous cette seule condition.

Rappelons d'abord que G agit transitivement sur S : si x et y sont dans S, il existe g dans G tel que $y = g(x)$.

Le groupe O_n est un compact de $M_n(R)$: c'est un fermé comme image réciproque de I_n par l'application continue $M \mapsto M^t.M$; il est borné, car si l'on choisit la norme $\| M \| = \sqrt{Tr(M^t.M)}$, alors $\| O \| = \sqrt{n}$ pour O dans O_n.
Quant à SO_n, c'est un fermé de O_n car l'application $\det$ est continue et $SO_n = \det^{-1}(1) \cap O_n$.

De ce fait, il existe sur les boréliens B du groupe métrisable compact $G = SO_n$ une probabilité m de Haar [2] et une seule telle que pour tout g de SO_n on ait : $m(gB) = m(B)$ [3]. On démontre alors (voir plus bas) que pour toute φ $m-$intégrable de G dans R et tout g de G, on a aussi $\int_G \varphi(gh) dm(h) = \int_G \varphi(h) dm(h)$.

Selon un schéma classique, l'invariance de q sur SO_n s'étend aux fonctions numériques f $q-$intégrables :

$$\int_S (f \circ O) \, dq = \int_S f \, dq .$$

En effet, $q(A) = q\left(O(A)\right)$ s'écrit comme $\int_S (1_A \circ O^{-1}) \, dq = \int_S 1_A \, dq$: on étend cette égalité par linéarité aux fonctions étagées, puis aux fonctions intégrables positives par le théorème de convergence monotone de Beppo-Levi, enfin aux fonctions intégrables de signe quelconque par la décomposition $f = f^+ - f^-$. En conséquence : pour toute f q-intégrable sur S et tout h de G, $\int_S f(x) dq = \int_S f(h(x)) dq$.

On intègre sur G cette égalité par rapport à $dm(h)$: à gauche, il reste $\int_S f(x) dq$, à droite, le théorème de Fubini donne $\int_S \left\{ \int_G f \circ h(x) dm(h) \right\} dq(x)$. Soit a fixé dans S.

[2] J. Dieudonné, Éléments d'Analyse, Tome 2, chapitre 14, qui donne la démonstration qu'Henri Cartan publia en 1940.

[3] La mesure de Lebesgue λ sur R est une mesure de Haar sur le groupe localement compact $(R,+)$: $\lambda(x+B) = \lambda(B)$ pour tout réel x.

Grâce à la transitivité de l'action de G sur S, $\int_G (f\circ h)(x)dm(h)$ est égale, à x fixé, pour un certain g, à $\int_G (f\circ h\circ g)(a)dm(h)$, elle- même égale à $\int_G (f\circ h)(a)dm(h)$ car m est une mesure de Haar sur G.

Au total, $\int_S f(x)dq = \int_G (f\circ h)(a)dm(h)$. Comme on a aussi $\int_S f(x)dp = \int_G (f\circ h)(a)dm(h)$, il vient $\int_S f(x)dp = \int_S f(x)dq$ pour toute f intégrable à la fois pour p et q. En prenant $f = 1_A$, il en résulte $p(A) = q(A)$ pour tout borélien A de S et donc $q = p$. De plus, l'égalité $\int_G (f\circ h)(a)dm(h) = \int_S f(x)dp$ permet de lever un coin du voile sur m : si X est un borélien de S, $m(h\in G : h(a)\in X) = p(X)$, pour tout a de S.

4) Variables aléatoires uniformes sur la sphère

Une variable aléatoire X à valeurs dans S, définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, sera dite uniforme si sa loi est p :

$$P(X\in A) = P\left(X^{-1}(A)\right) = p(A) \text{ pour tout borélien } A \text{ de } S.$$

Comme p est invariante par tout endomorphisme orthogonal, on vérifie facilement que X est uniforme si et seulement si, pour toute matrice O orthogonale d'ordre n, X et $O.X$ ont même loi.

B) Simulations de lois uniformes sur la sphère en dimension trois

1) En simulant d'abord une loi uniforme dans la boule unité

On simule une loi Z uniforme dans la boule unité par l'algorithme :

1. $x \leftarrow random, y \leftarrow randomx, z \leftarrow random$
2. $si\ \mathrm{x}^2 + y^2 + z^2 > 1\ aller\ en\ 1$
3. Z=(x,y,z).

Justification. Soit (X_n) la suite de variables uniformes sur $[-1,1]^3$ et indépendantes créée par le programme dans sa ligne 1. Introduisons la variable aléatoire T définie par $T = n$ si $X_1,\dots,X_{n-1} \notin B$ et $X_n \in B$: on a alors $Z = X_n$.

Pour tout borélien A de B,

$$P(Z\in A) = P(X_1\in A) + \sum_{n=2}^{\infty} P\left(X_1,\dots,X_{n-1}\notin B \text{ et } X_n\in A\right) = \sum_1^{\infty}\left(1-\frac{\lambda(B)}{8}\right)^{n-1}\frac{\lambda(A)}{8} = \frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}.$$

Prouvons ensuite que la variable aléatoire $Z/\|Z\|$ est uniforme sur S : il a été démontré que pour tout borélien A de la sphère, $P(Z\in A_1) = \dfrac{\lambda(A_1)}{\lambda(B)}$; or $\dfrac{\lambda(A_1)}{\lambda(B)} = p(A)$ et $Z\in A_1$ équivaut à $\dfrac{Z}{\|Z\|}\in A$. On a donc bien $P\left(\dfrac{Z}{\|Z\|}\in A\right) = p(A)$.

2) Avec la latitude et la longitude

On sait qu'un paramétrage de S est $x=\cos\theta\cos\varphi, y=\sin\theta\cos\varphi, z=\sin\varphi$: θ est la longitude du point M et l'angle φ sa latitude. Quand M décrit S uniformément, la loi de θ est uniforme sur $[0,2\pi[$: c'est évident car le volume de $\{M\in B : r\le\theta\le s\}$ est bien sûr $\dfrac{s-r}{2\pi}\lambda(B)$.

La loi de φ a pour densité $\dfrac{1}{2}\cos t$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$ (on écarte les deux pôles en lesquels θ n'est pas définie).

En effet, la fonction de répartition de φ, $p(\varphi \le t)$, est l'aire d'une calotte sphérique (divisée par l'aire de la sphère) de hauteur $h = 1+\sin t$: $p(\varphi \le t) = \dfrac{2\pi Rh}{4\pi R} = \dfrac{1+sint}{2}$; en dérivant, on obtient la densité $\dfrac{1}{2}\cos t$.

a) *θ et φ sont indépendantes*

Il nous faut montrer que $p(\theta \in A \text{ et } \varphi \in B) = p(\theta \in A)p(\varphi \in B)$ pour tout borélien A de $[0,2\pi[$ et tout borélien B de $]-\pi/2,\pi/2[$.

• On vérifie d'abord que $p(\theta \in I \text{ et } \varphi \in J) = p(\theta \in I)p(\varphi \in J)$ pour tout intervalle I de $[0,2\pi[$ et tout intervalle J de $]-\pi/2,\pi/2[$.
En effet, $\sigma(\theta \in I \text{ et } \varphi \in J)$ est l'intégrale triple $\int_C 1dxdydz$ sur le cône C de sommet O et de base $(\theta \in I \text{ et } \varphi \in J)$; en posant $x = r\cos\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\cos\varphi, z = r\sin\varphi$, cette intégrale se transforme en

$$\int_D r^2 |\cos\varphi| drd\theta d\varphi = \int_0^1 r^2 dr \int_{\inf I}^{\sup I} d\theta \int_{\inf J}^{\sup J} \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{3}.2\pi P(\theta \in I).2P(\varphi \in J).$$

On a donc $\sigma(\theta \in I \text{ et } \varphi \in J) = \lambda(B)p(\theta \in I).p(\varphi \in J)$ et $p(\theta \in I \text{ et } \varphi \in J) = p(\theta \in I)p(\varphi \in J)$.

• $p(\theta \in A \text{ et } \varphi \in J) = p(\theta \in A)p(\varphi \in J)$ pour *tout* A borélien de $[0,2\pi[$ et J intervalle *fixé* de $]-\pi/2,\pi/2[$.

Introduisons l'ensemble $\{A : p(\theta \in A \text{ et } \varphi \in J) = p(\theta \in A)p(\varphi \in J)\}$: cet ensemble contient tous les intervalles de $[0,2\pi[$; ces intervalles sont stables par intersection et engendrent les boréliens de $[0,2\pi[$, il en résulte que $p(\theta \in A \text{ et } \varphi \in J) = p(\theta \in A)p(\varphi \in J)$ pour tout borélien A de $[0,2\pi[$ (**[3]**, page 105).

• $p(\theta \in A \text{ et } \varphi \in B) = p(\theta \in A)p(\varphi \in B)$
On réitère le raisonnement précédent en fixant un borélien A de $[0,2\pi[$ et en introduisant l'ensemble $\{B : p(\theta \in A \text{ et } \varphi \in B) = p(\theta \in A)p(\varphi \in B)\}$ qui contient tous les intervalles de $]-\pi/2,\pi/2[$.

b) Réciproquement, si on tire θ uniformément dans $[0,2\pi[$, avec l'instruction $\theta \leftarrow 2\pi.random$, si on simule φ de densité $\dfrac{1}{2}\cos t$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$ par $\varphi \leftarrow \arccos(2.random-1)$, θ et φ seront indépendantes et la variable $X = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$ décrira uniformément la sphère S.

Démonstration. Il nous faut démonter que $p(X \in D) = p(D)$ pour tout borélien D de S. Considérons la bijection f bicontinue entre S privée de ses deux pôles et $[0,2\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[$ définie par $M \mapsto (\theta,\varphi)$. Comme les produits $A\times B$, où A est un borélien de $[0,2\pi[$ et B un borélien de $]-\pi/2,\pi/2[$ engendrent la tribu des boréliens de $[0,2\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[$, les $f^{-1}(A\times B)$ engendrent les boréliens de S privée de ses pôles. Il suffit donc de vérifier que $p\left(X \in f^{-1}(A\times B)\right) = p\left(f^{-1}(A\times B)\right)$. Or, $f^{-1}(A\times B) = \{M \in S : \theta \in A \text{ et } \varphi \in B\}$ et donc, par indépendance, $p\left(f^{-1}(A\times B)\right) = p(\theta \in A)p(\varphi \in B)$. D'autre part, f étant bijective,

$$p\left(X \in f^{-1}(A\times B)\right) = p\left(f(X) \in A\times B\right) = p\left((\theta,\varphi) \in A\times B\right) = p(\theta \in A)p(\varphi \in B) = p\left(f^{-1}(A\times B)\right).$$

3) Avec trois lois normales indépendantes

Si X, Y, Z sont trois lois normales $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes, alors le vecteur aléatoire

$T = \left(\dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \right)$ suit la loi uniforme sur S.

On veut prouver que $P\left(T^{-1}(A)\right) = p(A)$ pour tout borélien A de S ; posons $q = p \circ T^{-1}$, q est une probabilité sur S et pour qu'elle coïncide avec p il suffit que $q\left(R(A)\right) = q(A)$ pour toute isométrie linéaire R d'après **A-3)**.

En d'autres termes, R étant bijective, on doit avoir $p(RT \in A) = p(T \in A)$ ou encore $\lambda(N \in A_1) = \lambda(RN \in A_1)$ avec $N = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$: il suffira pour cela de prouver que les variables N et RN ont la même densité par rapport à λ.

a) N est un vecteur gaussien, ce qui veut dire que $aX + bY + cZ$ est normale pour tous réels a,b,c.
En effet, aX, bY, cZ sont des lois normales indépendantes, il en est de même de leur somme.

b) Comme N est centré et formé de lois indépendantes, sa matrice de covariance est l'identité.

c) Le vecteur aléatoire RN est gaussien, centré, de covariance l'identité car $R^t R = I_3$

d) La densité d'un vecteur gaussien ne dépend que de sa covariance (quand elle est inversible) : aussi, N et RN ont même densité.

Rappelons pour finir qu'on simule deux lois normales X et Y $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes par $X = \cos(2\pi U)\sqrt{-2\ln(V)}$ et $Y = \sin(2\pi U)\sqrt{-2\ln(V)}$, U et V étant uniformes et indépendantes sur $[0,1]$.

Bibliographie

[1] Charles Suquet, http://math.univ-lille1.fr/~suquet/Polys/simul.pdf

[2] Cédric Villani, http://math.univ-lyon1.fr/~villani/Cours/PDFFILES/chap4.pdf

[3] Daniel Saada, http://books.google.fr/books?id=kq69nXaoV-AC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false