# LE THÉORÈME DE PLONGEMENT D'URYSOHN :

**tout métrique séparable est homéomorphe à un sous-ensemble du cube de Hilbert**

---

Le cube de Hilbert, noté $H$, est l'espace $[0,1]^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à valeurs dans $[0,1]$, muni de la topologie produit. On démontre que $H$ est compact et que sa topologie peut être définie par la distance

$$d(a,b)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n-b_n|}{2^n}$$, où $a=(a_n)$ et $b=(b_n)$ sont deux éléments de $H$.

Comme métrique compact, $H$ est séparable, tout sous-ensemble de $H$ est donc séparable, et tout espace métrique séparable est alors homéomorphe à un sous-espace de $H$.

**1)** *On vérifie que* $d(x_n,x)\to 0$ *équivaut à* $\lim_n x_n(m)=x(m)$ *pour tout m* (ce qui est rassurant)

**a)** $d(x_n,x)\to 0$ implique $\lim_n x_n(m)=x(m)$ pour tout $m$

Fixons $m$ : à partir d'un rang $n_0$, $d(x_n,x)\le \varepsilon/2^m$, et donc pour $n\ge n_0$ $|x_n(m)-x(m)|\le\varepsilon$.

**b)** $\lim_n x_n(m)=x(m)$ pour tout $m$ implique $d(x_n,x)\to 0$

On coupe $d(x_n,x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|x_n(m)-x(m)|}{2^m}$ en $\sum_{m=0}^{K}\frac{|x_n(m)-x(m)|}{2^m}+\sum_{K+1}^{\infty}\frac{|x_n(m)-x(m)|}{2^m}$ ; comme $\sum_{K+1}^{\infty}\frac{|x_n(m)-x(m)|}{2^m}\le\sum_{K+1}^{\infty}\frac{2}{2^m}=\frac{2}{2^K}$, on choisit K tel que $2/2^K\le\varepsilon$. Il existe alors $n_0$ tel que pour $n\ge n_0$ et $m=1,2,\dots,K$ : $|x_n(m)-x(m)|\le\varepsilon$ ; on en déduit $d(x_n,x)\le\varepsilon\sum_{m=0}^{K}\frac{1}{2^m}+\varepsilon\le 3\varepsilon$, donc $d(x_n,x)\to 0$.

**2)** $(E,d)$ *est homéomorphe à* $(E,\delta)$, *avec* $\delta\le 1$, *par exemple* $\delta=d/(1+d)$

L'application identique de $(E,d)$ sur $(E,\delta)$ *est* une homéomorphie Il s'agit de montrer que toute boule ouverte pour $d$ contient une boule ouverte pour $\delta$, et réciproquement. En effet :

comme $\delta\le d$, $B_\delta(a,r)\subset B_d(a,r)$ ; si $r<1$, $B_d(a,\frac{r}{1-r})\subset B_\delta(a,r)$ et si $r=1$, $B_\delta(a,r)=E)$.

**3)** *Le plongement de* $(E,\delta)$ *dans le cube* $H$

L'injection $\varphi: x\to\left(\delta(x,a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue de $(E,\delta)$ dans $(H,d)$ car $d(\varphi(x),\varphi(y))\le 2\delta(x,y)$

**4)** $E$ *est homéomorphe à* $\varphi(E)$

Prouvons que $\varphi^{-1}$ est continue en tout $\varphi(x)$. Il est plus facile d'utiliser des suites, en s'appuyant sur le caractère *métrisable* de $H$ : si $\varphi(x_p)$ tend vers $\varphi(x)$ dans $H$, alors $x_p\to x$ dans $E$.

Soit $(a_n)$ une suite dense de $E$ : il existe n tel que $\delta(x,a_n)\le\varepsilon$. Pour cet entier n,

$$\lim_p \delta(x_p,a_n)=\delta(x,a_n)$$

et donc, pour $p\ge p_0$, $\delta(x_p,a_n)\le\delta(x,a_n)+\varepsilon$. Comme $\delta(x_p,x)\le\delta(x_p,a_n)+\delta(x,a_n)$,

$$\delta(x_p,x)\le 2\delta(x,a_n)+\varepsilon\le 3\varepsilon$$

ce qui termine la démonstration.